Exercice 1

De quelle(s) variable(s) dépendent les sommes suivantes ?

1. $\sum_{i=0}^{100} \left(\cos(i) + i^2\right)$
2. $\sum_{i=0}^{n} x^i$
3. $\sum_{i=1}^{100} x^i$
4. $\sum_{j=1}^{i} x^j$
5. $\sum_{j=1}^{i} x^k$
6. $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i(i-1)$
3. $\sum_{j=1}^{n} (2j-1)$
4. $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} (i+j)$
5. $\sum_{1\leq i,j\leq n} \max\{i,j\}$
6. $\sum_{0\leq i,j\leq n} x^{i+j}$
7. $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
8. $\sum_{k=3}^{n+1} k$
9. $\sum_{k=3}^{n-1} 2^k$

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$,
$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$$
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$$
4. En admettant l'existence de $L = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, en déduire un encadrement de L.

Exercice 4

Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{k=1}^{n} 2^k$
2. $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2}$
3. $\prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}$
4. $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ (et la limite quand $n \to +\infty$)

Exercice 5

Montrer que :

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$
2. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^{n} k^k$

Exercice 6

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n}$ est pair.

Exercice 7

Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}$$

Exercice 8

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$. On pourra soit utiliser une relation sur les coefficients binomiaux, soit considérer et dériver de deux façons différentes la fonction $x \mapsto (x+1)^n$. Adapter pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2$.

Exercice 9

Soit n un entier avec $n \geq 2$. On pose : $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

1. Montrer que $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.
2. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}$ et $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}$ pour en déduire P_n.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n + n x^{n+1}}{(x-1)^2}.$$

En déduire une formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k x^k$.

Exercice 11

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2\}, \qquad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente une expression simple de

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

3. Quelle est la limite de U_n quand $n \to +\infty$?

Exercice 12 *(*)*

Montrer en utilisant la formule du binôme de Newton que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 13 Systèmes linéaires sans paramètres

Résoudre les systèmes suivants :

1. $$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 2 \\ 2x-5y & = & 1 \end{array}\right. .$$

2. $$(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 6 \\ x-3y-7z & = & 10 \\ x+3y+4z & = & 6 \end{array}\right. .$$

3. $$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z+t & = & 1 \\ y+2z-t & = & -1 \\ -y-z-2t & = & 2 \end{array}\right. .$$

4. $$(S_4)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ 2x+5y-3z & = & 1 \\ 3x+4y+4z & = & 1 \\ x-2y+4z & = & 3 \end{array}\right. .$$

Exercice 14 Systèmes linéaires avec paramètres

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur a, b, c, le système
$$(S_5)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & a \\ -2x-3y+3z & = & b \\ x+y-4z & = & c \end{array}\right.$$
admet-t-il au moins une solution ? Résoudre ce système pour $a = b = c = 0$.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer, suivant la valeur de m, le nombre et l'ensemble des solutions du système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ donné par :
$$(S_6)\left\{\begin{array}{rcl} x+my & = & 1 \\ mx+y & = & 1 \end{array}\right. .$$
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire
$$(S_7)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+mz & = & m \\ x+my-z & = & 1 \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right.$$
4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire
$$(S_8)\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+z & = & 1 \\ x+aby+z & = & b \\ x+by+az & = & 1 \end{array}\right.$$
