Problème 1 *Le problème des chapeaux*

Partie 1 : Trois chapeaux

Trois personnes sont invitées à une soirée, chacune de ces personnes arrivant avec un chapeau. Mais ces chapeaux sont redistribués de façon aléatoire à la fin de la soirée, de sorte que chaque invité repart avec exactement un chapeau. On considère la variable aléatoire X qui à chacune de ces redistributions de chapeaux associe le nombre k d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau.

1. (a) Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ? Quel est le cardinal de cet univers ?

   (b) Ecrire les bijections de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,3\}$.

   (c) Déterminer la loi de probabilité de X.

2. (a) Calculer l'espérance de X.

   (b) Calculer sa variance.

Partie 2 : n chapeaux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On généralise le problème de la partie 1 en considérant n personnes invitées à une soirée. Chacune de ces personnes arrive avec un chapeau et ces chapeaux sont redistribués de façon aléatoire à la fin de la soirée, de sorte que chaque invité repart avec exactement un chapeau. On note X_n la variable aléatoire qui désigne le nombre k d'invités ayant retrouvé leur propre chapeau. Enfin, on note $p_n = P(X_n = 0)$.

1. (a) Justifier que $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{1}{3}$.

   (b) Déterminer p_4

2. Dorénavant, on pose par convention $p_0 = 1$.

   (a) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [|0,n|], P(X_n = k) = \frac{p_{n-k}}{k!}.$$

   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n-k}}{k!} = 1.$$

   (c) En déduire enfin que (p_n) est caractérisée par :
   $$\begin{cases} p_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_{n+1-k}}{k!}. \end{cases}$$

3. (a) Démontrer que l'espérance de X_n est égale à 1 et interpréter ce résultat.

   (b) Calculer la variance de X_n.

4. On considère la suite (d_n) définie par :
   $$\begin{cases} d_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ d_{n+1} = d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{cases}$$

   (a) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} (-1)^k kn = 0.$$

   (b) Démontrer par récurrence sur n que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n-k}}{k!} = 1.$$

   (c) Déduire des questions précédentes que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = d_n.$$

5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Problème 2

Rappels et notations

Pour tout entier naturel non nul n, on note :

- $[|1,n|]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$;
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$;

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$, et, pour tout entier naturel p, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p est noté $\mathbb{R}_p[X]$.

1. I — Étude d'une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = [X(X-1)]^n \end{cases}$$

De plus, on pose :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)t.$$

(a) Montrer que l'application $(P,Q) \longmapsto \langle P,Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

(b) On note $P_n^{(n)}$ le polynôme dérivé n fois de P_n.
Déterminer le degré de $P_n^{(n)}$ et calculer $P_n^{(n)}(1)$.
On définit la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = \frac{1}{P_n^{(n)}(1)} P_n^{(n)} \end{cases}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle Q, L_n\rangle = 0$.
Indication : on pourra intégrer par parties.

(d)

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 P_n(u)u$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

ii. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation : $\langle L_n, L_n\rangle = \dfrac{1}{2n+1}$.

(e) Déterminer une famille de polynômes $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de K_n vaut n et son coefficient dominant est strictement positif ;
ii. pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Justifier l'unicité d'une telle famille.

(f) Calculer K_0, K_1 et K_2.

II — Matrices de Hilbert

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice H_n par :

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, (H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

où $(H_n)_{i,j}$ désigne le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n. On note de plus $\Delta_n = \det(H_n)$.

2. (a) ***Étude de quelques propriétés de*** H_n

i. Calculer H_2 et H_3. Montrer que H_2 est une matrice inversible et déterminer son inverse.
Dans les questions suivantes de II.A, on désigne par n un entier naturel non nul.

ii. Montrer la relation :

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\Delta_n.$$

Indication : on pourra commencer par soustraire la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres.

iii. En déduire l'expression de Δ_n en fonction de n (on fera intervenir les quantités $c_m = \prod_{i=1}^{m-1} i!$ pour des entiers m adéquats).

iv. Prouver que H_n est inversible, puis que $\det(H_n^{-1})$ est un entier.

(b) ***Approximation au sens des moindres carrés***

On note $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On convient d'identifier l'espace $\mathbb{R}[X]$ au sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; ainsi, pour tout entier naturel i, le polynôme X^i est confondu avec la fonction polynomiale définie par : $X^i(t) = t^i$ pour tout $t \in [0,1]$.

On étend à $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ de la partie II en posant :

$$\forall (f,g) \in (\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}))^2, \langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)t.$$

(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.)

On note $\cdot$ la norme associée à ce produit scalaire : pour tout fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a donc :

$$f = \sqrt{\langle f,f \rangle}$$

i. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\Pi_n - f = \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} Q - f.$$

ii. Montrer que H_n est la matrice du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ restreint à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire, que :

$$\forall i,j \in 1,n, < X^{i-1}, X^{j-1} >= (H_n)_{i,j}.$$

iii. Calculer les coefficients de Π_n à l'aide de la matrice H_{n+1}^{-1} et des réels $\langle f, X^i \rangle$.

iv. Déterminer explicitement Π_1 lorsque f est la fonction définie pour tout $t \in [0,1]$ par : $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.

III — Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

3. (a) ***Somme des coefficients de H_n^{-1}***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [|1,n|]^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1}, c'est-à-dire :

$$s_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} h_{i,j}^{(-1,n)}$$

i. Calculer s_1 et s_2

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

A. Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(a_p^{(n)})_{0 \leqslant p \leqslant n-1}$ vérifiant le système de n équations linéaires à n inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_0^{(n)} & + & \frac{a_1^{(n)}}{2} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n} & = & 1 \\ \frac{a_0^{(n)}}{2} & + & \frac{a_1^{(n)}}{3} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n+1} & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_0^{(n)}}{n} & + & \frac{a_1^{(n)}}{n+1} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{2n-1} & = & 1 \end{array}\right.$$

B. Montrer que $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme S_n par $S_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} X + \ldots + a_{n-1}^{(n)} X^{n-1}$.
Dans les question suivantes de III.A, on désigne par n un entier naturel non nul.

iii. Montrer que :

$$\forall Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p$$

iv. Exprimer s_n à l'aide de la suite de polynômes $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie à la question I.E.

v. Pour tout $p \in 0n-1$, calculer $K_p(1)$.

vi. Déterminer la valeur de s_n.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

i. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\binom{2p}{p}$ est un entier pair.

En déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [|1, n|]$, alors $\binom{n+p}{p}\binom{n}{p}$ est un entier pair.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'on peut écrire : $K_n = \sqrt{2n+1}\Lambda_n$ où Λ_n est un polynôme à coefficients entiers que l'on explicitera. Parmi les coefficients de Λ_n, lesquels sont pairs ?
