Exercice 1 *Equations différentielles couplées*

L'objectif de l'exercice est de déterminer les couples de fonctions $(u_1,u_2) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ solutions du système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} u_1'(t) & = & -7u_1(t) - 5u_2(t) \\ & & \\ u_2'(t) & = & 10u_1(t) + 8u_2(t) \end{array} \right. \qquad (E)$$

On fixe $u_1,u_2 \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et pour $t \in \mathbb{R}$, on pose les vecteurs $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ et $U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que (E) peut être réécrit sous la forme $U'(t) = AU(t)$ pour une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à préciser.

On note désormais φ_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A.

2. L'objectif de cette question est de déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ **non nul** vérifiant $\varphi_A(x) = \lambda x$ (c'est-à-dire tel que $\varphi_A(x)$ est colinéaire à x).
   (a) Justifier que ce problème est équivalent à déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.
   (b) Calculer $\det(A - \lambda I_2)$, puis résoudre le problème.
   NB : à ce stade, on doit trouver deux valeurs de λ.
3. *Diagonalisation* de la matrice A.
   (a) Déterminer une base de $\ker(\varphi_A - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et de $\ker(\varphi_A + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$.
   (b) En déduire une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice $\mathrm{Mat}(\varphi_A)_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ représentative de φ_A dans $\mathscr{B}$ vaut la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   (c) Justifier alors que l'on a $A = PDP^{-1}$ pour une matrice P à préciser (on explicitera également P^{-1}).
4. Résolution de (E).
   Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit le vecteur $V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ par $V(t) = P^{-1}U(t)$.
   (a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $V'(t) = \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{pmatrix}$ vaut $P^{-1}U'(t)$.
   (b) En déduire que (E) est équivalent au système $V'(t) = DV(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
   (c) Ecrire ce dernier système sur les fonction v_1 et v_2, et le résoudre.
   (d) Résoudre le problème initial.

Exercice 2 *Matrices à diagonale propre*

Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geq 2$. et I_n désigne la matrice identité d'ordre n.
On dira qu'une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice à diagonale propre** ssi le polynôme $\det(A - XI_n)$ vérifie :

$$\det(A - XI_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_{i,i} - X)$$

On pourra noter en abrégé : A est une **MDP** pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

Partie 1 : Exemples

1. Soit α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$ Démontrer que, pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?

3. Cas n = 2
   Déterminer $\mathscr{E}_2$.

<u>Partie 2 : Test dans le cas $n = 3$</u>

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible. Donner un exemple de matrice à diagonale propre (non diagonale) de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On donnera A^{-1}.

5. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\det A = \prod_{i=1}^{3} a_{i,i} \text{ et } a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} + a_{2,3}a_{3,2} = 0$$

6. Parmi les matrices suivantes, indiquer les matrices à diagonale propre :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *Famille de polynômes orthogonaux*

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$. On pourra confondre la notion de polynôme et celle de fonction polynomiale dans l'exercice. Pour deux polynômes P et Q dans E, on pose

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, \cdots, X^n, \cdots)$ de E. On obtient donc une famille orthonormée de polynômes $(P_0, P_1, \cdots, P_n, \cdots)$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Vect}(1, X, \cdots, X^k) = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \cdots, P_k)$$

   Le polynôme P_n s'appelle le polynôme de Legendre d'indice n.

2. Calculer P_0 et P_1.

3. Justifier que pour $n \geq 1$, le polynôme P est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que le polynôme P_n est de degré n.
   On prend $n \geq 1$. On veut démontrer que P_n admet n racines simples dans $[-1, 1]$.

4. Justifier que $\int_{-1}^{1} P_n(t)\mathrm{d}t = 0$ et en déduire que P_n admet au moins une racine dans $[-1, 1]$.
   On suppose par l'absurde que P_n admet strictement moins de n racines simples. Si P_n admet des racines $t_1, \cdots, t_p$ de multiplicité impaire avec $p < n$, on pose $Q = (X - t_1)\cdots(X - t_p)$; sinon, on pose $Q = 1$. On considère enfin le polynôme $H = QP_n$.

5. Justifier que $\int_{-1}^{1} H(t)\mathrm{d}t = 0$, puis conclure (on pourra remarquer que H est de signe constant sur $[-1, 1]$).
