$\boxed{\text{PROBLÈME}}$: Matrices et endomorphismes nilpotents

Dans tout ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 2.

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, un endomorphisme f de E est dit *nilpotent* lorsqu'il existe un entier naturel k tel que :

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}} = 0 \text{ (endomorphisme nul de } E\text{)},$$

et dans ce cas, on appelle *indice de nilpotence de* f, et on note $\nu(f)$, le plus petit entier naturel k tel que $f^k = 0$ (on rappelle que par convention f^0 est l'application Id_E identité de E).

Ainsi, $\nu(f) = p$ si et seulement si $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

On peut définir de façon analogue les matrices nilpotentes dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et on notera $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices nilpotentes.

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $rg(M)$ désigne le rang de la matrice M, $Tr(M)$ désigne la trace de la matrice M.

L'objectif de ce problème est de présenter des exemples et d'étudier quelques propriétés des matrices et endomorphismes nilpotents.

Les parties I,II,III,IV sont indépendantes entre elles, certains résultats de la partie IV sont utilisés dans la partie V.

PARTIE I : Exemples de matrices nilpotentes

1. Vérifier que les matrices $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes et précisez leur indice de nilpotence (*on discutera en fonction des valeurs des réels a, b et c*).

   On considère dans la suite de cette partie les deux matrices suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (dont les éléments sont tous nuls, à l'exception d'un seul qui est égal à 1) :

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les puissances (d'indice plus grand que 1) des matrices A et B. Ces matrices sont-elles nilpotentes ? Si oui préciser l'indice de nilpotence.
3. Calculer les puissances $(A+B)^q$ en distinguant les cas $q = 2k$ et $q = 2k+1$. La matrice $A + B$ est-elle nilpotente ?
4. Expliciter les matrices AB et BA.

   Calculer les puissances des matrices AB et BA. Ces matrices sont-elles nilpotentes ?

5. L'ensemble $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? est-il stable par produit, c'est-à-dire : le produit de deux éléments de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ est-il encore un élément de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ en général ?

PARTIE II : Une matrice aléatoire

Dans cette partie $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé fini, p est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$, et X_1, X_2, X_3 sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes trois la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre p. On considère alors la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et la variance $\mathbb{V}(X_1)$ de la variable aléatoire X_1 (*justifications non demandées*).
2. Quelles sont les valeurs possibles de $rg(M)$? Déterminer la loi de $rg(M)$.
3. Quelle est la loi de $Tr(M)$? Donner, sans justifier, $\mathbb{E}(Tr(M))$ et $\mathbb{V}(Tr(M))$.
4. Calculer M^2, et l'exprimer à l'aide de $Tr(M)$.
5. Calculer la probabilité que la matrice M appartienne à $\mathcal{N}_3(\mathbb{R})$.

PARTIE III : Exemple d'endomorphisme nilpotent

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit Δ l'application :

$$\Delta : \begin{array}{ll} \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array}$$

Par exemple, si $P(X) = X^2$, alors $\Delta(P)(X) = (X+1)^2 - X^2$.

1. Vérifier que Δ est un endormorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. On souhaite déterminer $\ker(\Delta)$.
   a) On fait l'hypothèse dans cette question que P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$, appartenant à $\ker(\Delta)$.
      i. Justifier que P admet au moins une racine complexe z_0.
      ii. Etablir que P possède une infinité de racines complexes et obtenir une contradiction.

b) En déduire $\ker(\Delta)$.

3.

a) On suppose dans cette question que $P \in \mathbb{R}[X]$ n'est pas le polynôme nul. On note a_d le coefficient dominant de P. Préciser le degré du polynôme $P(X+1)$, ainsi que son coefficient dominant en fonction de $d = \deg(P)$ et a_d.

b) Justifier que la restriction Δ_n de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Déterminer l'image et le noyau de Δ_n.

5. Prouver que, pour tout entier naturel $k \geq 1$:

$$\ker(\Delta^k) = \mathbb{R}_{k-1}[X].$$

6. Etablir que l'endomorphisme Δ_n nilpotent, et préciser son indice de nilpotence $\nu(\Delta_n)$.

7. L'endomorphisme Δ est-il nilpotent ?

8. **Utilisation de Δ_n pour le calcul d'une somme**

   On suppose dans cette question uniquement que $n = 4$. On note $C=(1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.

a) Déterminer la matrice D_4 de Δ_4 dans base C.

b) Trouver cinq réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 vérifiant :

$$D_4 \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) En déduire, pour $m \in \mathbb{N}$, une expression factorisée de :

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} k^3.$$

PARTIE IV : Etude de quelques propriétés des matrices nilpotentes

1. Une matrice nilpotente est-elle inversible ?
2. Justifier que si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, alors la transposée N^T de N est également nilpotente, et $\nu(N^T) = \nu(N)$
3. Prouver que si M et N sont deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M \times N = N \times M$, alors

a) $M \times N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et $\nu(M \times N) \leq \min(\nu(M), \nu(N))$;

b) $M+N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ et $\nu(M+N) \leq \nu(M)+\nu(N)-1$.

4.

a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice semblable à N.

i. Montrer que, pour tout entier naturel k, M^k et N^k sont semblables.

ii. En déduire que, si N est nilpotente, M l'est aussi et $\nu(N)=\nu(M)$.

b) On suppose dans cette question que N est une matrice de $\mathcal{N}_3(\mathbb{R})$ d'indice de nilpotence $\nu(N)=2$. On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f)=N$.

i. Etablir que $\mathrm{Im}(f) \subset Ker(f)$.

ii. En déduire les dimensions de l'image et du noyau de f.

iii. Prouver l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Etablir qu'une matrice N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice de nilpotence égal à 2 si et seulement si N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. On souhaite démontrer dans cette question que si $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, alors $\nu(N) \leq n$.
On suppose donc $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(f)=N$. On pose $p=\nu(N)$.

a) Justifier qu'il existe un vecteur x_0 de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{\,p-1}(x_0) \neq 0$.

b) Prouver que la famille $(x_0, f(x_0), f^{\,2}(x_0), ..., f^{\,p-1}(x_0))$ est libre, puis conclure.

PARTIE V : Exponentielle de matrice

1. Dans cette question x désigne un nombre réel **<u>fixé</u>**.

a) En raisonnant par récurrence, prouver que, pour tout entier naturel n :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

b) On suppose de plus que x est positif ou nul. En remarquant que pour tout $t \in [0,x], 0 \leq e^t \leq e^x$, établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right) = 0.$$

On admet que ce résultat reste valable pour $x<0$.

c) Conclure que

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

que l'on note : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2. Si A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\nu(A)-1} \frac{A^k}{k!}$$

que l'on pourra noter : $\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

a) Prouver que si A et B sont des matrices nilpotentes vérifiant $A \times B = B \times A$, alors

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$$

(*on pourra utiliser le résultat de la question 3.b de la partie IV*).

b) Etablir que si A est une matrice nilpotente, alors $\exp(A)$ est inversible.

c) Déterminer $\exp(A)$ où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$