E3A2 2018 (PC)

L'objet de ce problème est détudier les éventuelles solutions de l'équation :

$$\ln(x) = ax$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $x > 0$ est l'inconnue.

Partie I. Etude de l'équation (E_a)

1. On se fixe, dans cette qeustion, un réel a quelconque.
   (a) Montrer que si $a \in]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in]0, 1]$.
   (b) Montrer que que si $a \in]0, \frac{1}{e}[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions α et β vérifiant $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$.
   (c) Montrer que si $a = \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.
   (d) Montrer que si $a > \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.
2. Illustrer sur quatre graphiques différents les cas où $a \in]-\infty, 0]$, $a \in]0, \frac{1}{e}[$, $a = \frac{1}{e}$ et $a > \frac{1}{e}$ (on représentera la fonction logarithme ainsi que la droite d'équation $y = ax$)

Partie II. Etude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad (R)$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solutions de (R).
2. Soit φ une solution de (R). Montrer que :

$$\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0.$$

3. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.
   (a) Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) > 0$.
   (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(nx) = (\varphi(x))^n.$$

   (c) Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m.$$

   (d) Déduire des questions précédentes que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}.$$

   (e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers x ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant la fonction partie entière).
   (f) Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = (\varphi(1))^x.$$