1 Résolution d'équations

Exercice 1 *Méthode de Héron : généralisation et précisions*

On cherche dans cet exercice à étudier une généralisation de l'algorithme de Héron afin de calculer les racines p-èmes ($p > 1$) d'un nombre $\alpha > 0$. On définit la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 > 0$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{\alpha}{x_n^{p-1}}\right)$$

1. Vérifier que la suite (x_n) est bien définie.
2. En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \frac{1}{p}\left((p-1)x + \frac{\alpha}{x^{p-1}}\right)$, montrer que la suite est décroissante à partir du rang 1 et converge vers $\sqrt[p]{\alpha}$.
3. Montrer que la convergence est quadratique, c'est-à-dire que la suite

$$\left(\frac{x_{n+1} - \sqrt[p]{\alpha}}{(x_n - \sqrt[p]{\alpha})^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

   admet une finie non nulle.
4. On fixe désormais $\alpha = p = 2$. On pose, pour $x > 0$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

   (a) On pose $f : x \mapsto x^2 - \alpha$. Montrer que l'abscisse x_1 du point en lequel la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 est $\varphi(x_0)$.

   (b) Montrer que pour $x > \sqrt{2}$:

$$0 < \varphi(x) - \sqrt{2} < \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$$

   (c) On suppose $x_0 > \sqrt{2}$ et on pose, pour $n \geq 0, v_n = \ln(x_n - \sqrt{2})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} < 2v_n - a$, où $a = 3\ln(\sqrt{2})$.

   (d) Montrer qu'il existe n_0 tel que $v_{n_0} < 0$ et, pour $n \geq 0$:

$$v_{n+n_0} < 2^n v_{n_0} - (2^n - 1)a < -(2^n - 1)a$$

   (e) Application numérique : on suppose $x_0 = 16$, déterminer n_0 le plus petit possible; En déduire un majorant du plus petit n tel que $|x_n - \sqrt{2}| < 10^{-12}$ (on pourra utiliser les inégalités $\ln 10 < 2,4$ et $a > 1,03$).

Exercice 2 *Analyse précise de la méthode de Newton*

Dans tout le problème, on considère deux réels a,b tels que $a<b$, une application $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ telle que $f(a)>0, f(b)<0$ et f' est strictement négative sur $[a,b]$.

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ d'inconnue x admet une unique solution dans $]a,b[$. On notera cette solution α.
2. Soit $x_0\in[a,b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à f en $(x_0,f(x_0))$.

   On introduit la fonction $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par :
   $$\forall x\in[a,b], g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$
3. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Calculer la dérivée de g sur $[a,b]$. Donner en particulier la valeur de $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
4. Montrer qu'il existe deux réels m et M strictement positifs tels que :
   $$\forall x\in[a,b], |f'(x)|\geq m \quad \text{et} \quad |f''(x)|\leq M.$$
5. Montrer qu'il existe $L>0$ tel que : $\forall t\in[a,b], |f(t)|\leq L|t-\alpha|$.
6. Soit $x\in[a,b]$. En utilisant le théorème des accroissements finis entre x et α, montrer que $|g(x)-\alpha|\leq\dfrac{M}{m^2}L|x-\alpha|^2$.
7. On pose $K=\frac{ML}{m^2}$. Montrer qu'il existe $h>0$ tel que, en notant $I=[\alpha-h,\alpha+h]$, on ait $Kh<1$ et $I\subset[a,b]$.
8. Montrer que : $\forall x\in I, g(x)\in I$.

   On introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0\in I$ et : $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=g(x_n)$.
9. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans I.
10. Montrer que :
    $$\forall n\in\mathbb{N}, |x_n-\alpha|\leq\frac{1}{K}\left(K(x_0-\alpha)\right)^{2^n}$$
11. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

    Dans toute la fin du problème, on étudie un exemple d'une telle méthode de Newton pour obtenir une approximation de $\sqrt{3}$. On considère donc $f:[1,3]\to\mathbb{R}, x\mapsto 3-x^2$.
12. En reprenant les notations de la question 7, montrer qu'on peut prendre $K=3$ et $h=0,3$. On notera que $1,7<\sqrt{3}<2$.
13. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=g(x_n)$ est bien définie.
14. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, |x_n-\sqrt{3}|\leq\frac{1}{3}(0,9)^{2^n}$.
15. Combien d'itérations doit-on faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ avec cette méthode ?
16. Si l'on avait utilise une méthode de dichotomie, combien d'itérations aurait-on dû faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$?

Exercice 3 *Calcul de l'inverse par la méthode de Newton*

Soit $y > 0$. On définit $f : x \mapsto \frac{1}{x} - y$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que quel que soit le choix de la condition initiale $x_0 \in]0, 1/y[$, la méthode de Newton fournit une suite croissante (x_n) convergeant vers $1/y$. (On pourra utiliser la convexité et la décroissance de f, et bien sûr faire un dessin.)
2. Étudier le comportement de la suite quand $1/y < x_0 < 2/y$. Que se passe-t-il si $x_0 = 2/y$?
3. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.

La méthode de Newton fournit donc un algorithme rapide de calcul de l'inverse n'utilisant que des multiplications et des soustractions.

2 Intégrales et séries

Exercice 4 *Équivalent du reste de série de Riemann*

Soit $\alpha > 1$. En effectuant une comparaison intégrale, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

En déduire l'équivalent

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Exercice 5 *Théorème de réarrangement de Riemann*

Le but de cet exercice est de montrer le caractère particulièrement pénible des séries semi-convergentes (c'est-à-dire des séries $\sum a_n$ qui convergent, mais pas absolument), qui explique notamment la transformation de Newton-Brouckner. On fixe dans l'exercice une série $\sum a_n$ réelle et semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On note A (respectivement B) l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_n \geq 0$ (respectivement $a_n < 0$). Montrer que A et B sont infinis.
2. Montrer que les familles $(a_n)_{n \in A}$ et $(a_n)_{n \in B}$ ne sont pas sommables.
3. Construire une permutation σ de $\mathbb{N}$ par récurrence de sorte à rajouter des termes positifs lorsque la somme courante est inférieure à α, des termes négatifs sinon.
4. Énoncer précisément le résultat obtenu.

Exercice 6 *Développement asymptotique de la série harmonique*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

1. En estimant la différence $H_{2n} - H_n$, montrer que $H_n \to +\infty$.
2. En utilisant la décroissance de f sur chaque intervalle $[k, k+1]$ pour $k \geq 1$, montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

3. En déduire l'équivalent $H_n \sim \ln n$.
4. On pose $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, et en déduire la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers une certaine limite $\gamma \in [0, 1]$.
5. En posant $t_n = u_n - \gamma$ et en cherchant un équivalent de $t_n - t_{n-1}$, trouver un équivalent de t_n
6. En déduire que

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

7. En itérant la méthode, continuer d'améliorer la précision du développement asymptotique de la série harmonique, jusqu'à en avoir assez.

Exercice 7 *Algorithme de Brouckner*

1. On pose, pour $n \geq 1$: $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 2$$

   (On pourra utiliser le développement asymptotique de la série harmonique pour cette dernière égalité.)
2. Montrer que la série de terme général $v_n = u_n + u_{n+1}$ converge et que la somme de cette série est également $\ln(2)$.
3. Estimer la vitesse de convergence de $\sum v_n$ vers $\ln 2$.

Exercice 8 *Modification de la série harmonique*

On note p_n le n-ème entier naturel non nul (dans l'ordre croissant) dont l'écriture décimale ne comprend pas de 9. Étudier la nature de la série

$$\sum \frac{1}{p_n}$$

---

3 Dénombrement

Exercice 9 *Formule de Vandermonde*

Montrer par un raisonnement de dénombrement que pour tous $a, b, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Exercice 10 *D'autres raisonnements du même type*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq n$:

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

Montrer de même que pour tout $a \leq b \leq n$:

$$\binom{n}{b} \binom{b}{a} = \binom{n}{a} \binom{n-a}{b-a}$$

Exercice 11 *Dénombrement de parties*

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 12 *Anagrammes*

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « ANAGRAMMES » ?

4 Probabilités

Exercice 13 *Maximisation d'une loi de Poisson*

Soit X une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$ la probabilité de $X = n$ est-elle maximale ? Inversement, n étant fixé, pour quelle valeur de λ la probabilité de $X = n$ est-elle maximale ?

Exercice 14 *Sommes de poissons*

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ, μ. Déterminer la loi de $Z = X + Y$. En déduire la loi de X sachant $Z = n$.

Exercice 15 *Estimation d'un nombre suffisant de tirages*

On lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Le nombre moyen de tirages donnant un 6 est donc de $n/6$. On note Y_n le nombre de tirages contenant un 6.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y_n.
2. En déduire, grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, un majorant du nombre minimal de tirages nécessaire à ce que la probabilité que Y_n soit entre 0 et $n/3$ soit supérieure à $1/2$, puis à $9/10$.
3. En calculant explicitement $\mathbb{P}(0 \leq Y_n \leq n/3)$, déterminer ce nombre minimal en pratique. Qu'en conclure ? *(Pour la simulation numérique, on peut ne pas faire les calculs à la main... !)*

Exercice 16 *Une preuve probabiliste d'une inégalité explicite*

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à une loi binomiale de paramètres $4n, 1/2$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \geq \frac{n-1}{n} 2^{4n}$$

Exercice 17 *Problème du collectionneur*

Un enfant veut acheter les images d'un album (d'une marque non précisée) de l'Euro 2020. Il y a 448 images, mais elles sont vendues par paquets de 8, il y a donc 56 paquets à trouver. On supposera que l'enfant est très solitaire et ne cherche pas à faire des échanges avec ses camarades (heureusement, dans la vraie vie, ces échanges sont possibles). On supposera également les paquets répartis uniformément (hélas, cette hypothèse est moins sûre...). On note X le nombre de paquets à acheter pour compléter l'album, $N = 56$ et X_k le nombre de paquets à acheter pour en trouver un nouveau lorsqu'on a acheté le k-ème.

1. Déterminer la loi de X_k.
2. En déduire $E(X)$ et $V(X)$, ainsi que leur équivalent quand $N \to +\infty$. Application numérique pour l'Euro 2020 ?
3. Montrer que pour tout $\delta > 0$:
$$\mathbb{P}(|X - NH_n| \geq \delta N) \leq \frac{2}{\delta^2}$$
En déduire un majorant du nombre de paquets à acheter pour être sûr avec une probabilité de $95/100$ de compléter son album ainsi qu'une estimation du budget à prévoir pour ses parents (une pochette coûte 5 euros). [a].

---

[a]. Mais comme, on l'a vu, Bienaymé-Tchebychev est très pessimiste, ils ont quelque chance d'avoir prévu large et de pouvoir utiliser le reste pour aller au restaurant en amoureux le soir de la finale...