DS 8

Exercice 1

1. On considère les polynômes de $\mathbb{R}_5[X]$ suivants : $P_1 = X^5 + X^4$, $P_2 = X^5 + X$ et $P_3 = -X^5 + 3X^4 + 2X$.
   (a) La famille (P_1, P_2, P_3) est-elle libre ou liée ?
   (b) On pose $F = (P_1, P_2, P_3)$. Calculer $\dim(F)$.
   (c) Montrer que $X \in F$.
2. On pose :
$$G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P(1)\}.$$
   Montrer que G est un espace vectoriel, déterminer une base de G et la dimension de G.
3. Montrer que F et G sont en somme directe.
4. On pose $H = F \oplus G$.
   (a) Déterminer une base de H adaptée à la décomposition ci-dessus.
   (b) Montrer que :
$$H = \mathbb{R}_5[X].$$

Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, formé des polynômes à coefficients réels, et de degré inférieur ou égal à 2.

1. Soit f un endomorphisme de E tel que :
$$f^3 = 0, \text{ et } f^2 \neq 0 \quad (1)$$
   où 0 est l'endomorphisme nul de E ($f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$).
   (a) Montrer que si P est un polynôme de E tel que $f^2(P)$ est non nul, la famille $(P, f(P), f^2(P))$ est une base de E.
   (b) Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
2. On dit que les endomorphimes f et g commutent si et seulement si :
$$f \circ g = g \circ f.$$
   Montrer que l'endomorphisme g commute avec f si et seulement si g est combinaison linéaire des endomorphismes Id, f, f^2.
   (Id désigne l'identité de E).
3. Application : on suppose que les endomorphismes f et g sont ainsi définis :
$$\forall P \in E,\ f(P)(X) = P'(X), \text{ et } g(P)(X) = P(X+2).$$
   Montrer que f vérifie la propriété (1), et que g commute avec f.
   Déterminer le triplet (a, b, c) de réels tel que :
$$g = a\mathrm{Id} + bf + cf^2.$$

Problème 3

Nous disposons d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés $D1$ et $D2$.
La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.
Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé $D1$ a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé $D2$ a 2 faces rouges et 4 blanches.
L'expérience est la suivante :

— nous commençons par jeter la pièce,

— si nous obtenons pile, nous choisissons le dé $D1$, sinon nous choisissons le dé $D2$, choix définitif pour la suite de l'expérience,
— ensuite nous jetons plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les événements suivants :

— $D1$ est l'événement : "nous jouons avec le dé $D1$",
— $D2$ est l'événement : "nous jouons avec le dé $D2$",
— pour tout entier naturel n, R_n est l'événement : "nous avons obtenu une face rouge au $n^{\text{ième}}$ lancer du dé choisi".

1. Quelles sont les valeurs de $P(D_1)$? $P(D2)$?
   Montrer que (D_1, D_2) consititue un système complet d'événements.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelles sont les valeurs de $P_{D1}(R_n)$? de $P_{D2}(R_n)$?
3. Calculer $P(R_1)$.
4. Etablir un lien entre les probabilités $P_{D1}(R_1)$, $P_{D1}(R_2)$ et $P_{D1}(R_1 \cap R_2)$.
   En déduire la valeur de $P(R_1 \cap R_2)$.
5. Montrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

   En déduire pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1})$.
6. Calculer $P_{R_1 \cap R_2}(D1)$, puis de manière générale, pour tout entier naturel non nul n, montrer que :

$$P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

7. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$, après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé $D1$ ou sur le fait d'avoir une face rouge au lancer suivant ?

Problème 4

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.
Si f est un endomorphisme de E, et si F est un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$.
Pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E on définit la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n.
Les deux parties de ce problème sont indépendantes.

I Première partie

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur $u \neq 0$ est stable par f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$.
2. (a) Montrer que $\{0\}$ et E sont stables par f.
   (b) On considère dans cette question uniquement que $E = \mathbb{R}^2$.
      i. Justifier qu'il existe un unique $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$f(1,0) = (0,1) \text{ et } f(0,1) = (-1,0).$$

      ii. Montrer que f n'admet que deux sous-espaces stables.

3. (a) Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par f.
   (b) Montrer que si E est de dimension finie $n \geqslant 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.
   (c) On considère dans cette question uniquement que $E = \mathbb{R}^2$.
      i. Justifier qu'il existe un unique $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :
      $$f(1,0) = (0,0) \text{ et } f(0,1) = (1,0).$$
      ii. Montrer que f n'admet que trois sous-espaces stables.
4. Monter que s'il existe $x_1, \dots x_p \in E \setminus \{0\}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que, pour tout $i \in 1, p$: $f(x_i) = \lambda_i x_i$ alors $F = (x_1, \dots, x_p)$ est stable par f.
5. Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\dim(\ker(f - \lambda Id_E)) \geq 2$ alors il existe une infinité de droites de E stables par f.
6. On suppose dans cette question que tous les sous-espaces de E sont stables par f.
   (a) Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
   (b) Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$.
      i. Si (x,y) est liée, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
      ii. Si (x,y) est libre, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.
   (c) Montrer que f est une homothétie.

II Deuxième partie

1. On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$.
   (a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D.
   (b) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D.
      i. Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tels que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
      ii. Montrer que la famille $(D^i(R))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille libre de F.
      iii. En déduire que $F = \mathbb{K}_n[X]$.
   (c) Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D.
2. On considère un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
   Soit $u \in E$ tel que $u \notin \ker(f^{n-1})$.
   On pose, pour tout $i \in [|1,n|]$:
   $$e_i = (i-1)! f^{n-i}(u),$$
   et $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in [|1,n|]}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de E.
   (b) Soit $i \in [|1,n|]$ exprimer $f(e_i)$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique isomorphisme φ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans E tel que :
   $$\forall i \in 1, n,\ \varphi(X^{i-1}) = e_i.$$
   (d) En déduire que :
   $$f = \varphi \circ D \circ \varphi^{-1}.$$
   (e) Donner tous les sous-espaces de E stables par f. Combien y en a-t-il ?