DS 7

Ce devoir est constitué de trois exercices couvrant les deux thèmes principaux du devoir (algèbre linéaire et analyse asymptotique), ainsi que de trois exercices plus ardus. Le fait de faire les trois premiers exercices correctement assurera une note minimale de 12 ou 13 : tout élève qui n'a pas obtenu une telle note aux précédents devoirs doit donc **impérativement** se concentrer sur ces exercices, et ne passer à la suite que s'il ou elle est vraiment sûr d'avoir fait tout ce qu'il savait faire.
Tout document ou appareil électronique est interdit.

Exercice 1 *Exercice préliminaire*

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer un équivalent simple, lorsque $n \to +\infty$, de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$. En déduire la limite de u_n.
2. Déterminer un équivalent simple, lorsque $n \to +\infty$, de $\sqrt{n^2 - \ln n}$.
3. Former le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(2x) - \mathrm{ch}(x)$.
4. Déterminer la limite, lorsque $x \to 0$, de :
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$$
5. On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \quad \text{tel que} \quad P(1) - \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel, et en déterminer une base.
6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (2x+y+z, x-y-z)$$
Montrer que f est linéaire. Déterminer une base de son noyau et de son image. f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 2 *Un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$

E désignera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique.
On pose $v = e_1 - e_2 + e_3$, et f l'aplication de E dans E définie par :
$$\forall x \in E, f(x) = x - 2(x_1 + x_2 + x_3)v$$
où l'on a noté (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
3. Calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$. En déduire f^2.
4. En déduire que f est inversible et donner f^{-1}.
5. Soient f_1 et f_2 les endomorphismes de E définis par : $f_1 = f - Id_E$ et $f_2 = f + Id_E$.
   (a) Déterminer une base de $\ker(f_1)$ et de $\ker(f_2)$.
   (b) Montrer que $E = \ker(f_1) \oplus \ker(f_2)$.

Exercice 3 *Étude d'une fonction*

Pour $x \in I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$, on pose : $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera toujours ce prolongement f dans la suite.
3. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f.
4. f est-elle dérivable en 0 ? Le cas échéant, donner son nombre dérivé en 0, l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 ainsi que la position relative du graphe de f et de cette tangente au voisinage de 0.

Exercice 4 *Somme de projecteurs*

Dans tout l'exercice, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On rappelle que si $f \in \mathscr{L}(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel de E, on dit que F est *stable par* f si et seulement si $f(F) \subset F$.

1. Soit p un projecteur de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que p et u commutent si et seulement si $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u.
2. Soit q un projecteur de E et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par q si et seulement si
$$F = (F \cap \ker q) \oplus (F \cap \operatorname{Im} q)$$
3. Déduire de ce qui précède que deux projecteurs p, q de E commutent si et seulement si
$$E = (\ker p \cap \ker q) \oplus (\ker p \cap \operatorname{Im} q) \oplus (\operatorname{Im} p \cap \ker q) \oplus (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)$$

Exercice 5 *Une suite récurrente*

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = \frac{\pi}{2}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Montrer que l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ est stable par sin et que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) < x$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
4. Rappeler le développement limité de sin en 0 à l'ordre 3.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$u_{n+1}^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} u_n^\alpha \left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) \underset{n\to+\infty}{=} u_n^\alpha - \frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})$$
6. En déduire qu'il existe une unique valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite finie non nulle. Quelle est cette valeur ? Quelle est alors la limite l de la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
Pour la question suivante, on admet le **théorème de Cesàro** : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l_0 \in \mathbb{R}$, alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $c_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ converge également, et sa limite est l_0.
7. Montrer que $\frac{1}{n}\left(u_n^\alpha - u_0^\alpha\right)$ converge vers l.
8. En déduire un équivalent simple de u_n^α.
9. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.
10. (Question bonus) : démontrer le théorème de Cesàro admis précédemment.

Exercice 6 *Développement asymptotique d'une suite définie de façon implicite*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x\sqrt{1+\dfrac{x}{n}} = 1$.

Dans toute la suite de l'exercice, on note x_n l'unique réel positif tel que $x_n\sqrt{1+\dfrac{x_n}{n}} = 1$.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \, 0 \leq x_n \leq 1$.
   (b) En déduire que $x_n \to 1$.

3. (a) A l'aide d'un DL dans l'égalité $x_n\sqrt{1+\dfrac{x_n}{n}} = 1$, montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{x_n^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   (b) En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   (c) Déterminer un équivalent de $\ln(x_n)$.

4. Déterminer une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{\alpha}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.