DS 6

Ce devoir est constitué de deux exercices et d'un (long) problème. Il vaut mieux, comme d'habitude, faire peu de choses bien que beaucoup de choses en les bâclant. Soyez donc **très** précis dans la rédaction, les arguments, les hypothèses, les théorèmes utilisés...
Tout document ou appareil électronique est interdit.

Exercice 1 *Exercice préliminaire*

On considère un réel θ appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$ et le polynôme P défini par :

$$P(X) = X^2 - 2(\cos\theta)X + 1$$

1. (a) Préciser pour quelles valeurs de θ le polynôme P a une racine double, et préciser les valeurs de cette racine suivant la valeur de θ.
   (b) Dans les autres cas, donner les racines de P.
2. On considère un entier naturel non nul n, et le polynôme S_n défini par :

$$S_n(X) = X^{2n} - 2(\cos\theta)X^n + 1$$

   Déterminer les racines de S_n en précisant leur nombre.

Exercice 2 *Dérivées successives*

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.
2. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.
3. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

   On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
4. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.
5. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

   Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.
6. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

Problème 3 *Une équation polynomiale*

Pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, on considère l'équation, notée $E_{a,b}$:

$$P(X^2) = P(X+a)P(X+b)$$

d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Quels sont les polynômes constants vérifiant $E_{a,b}$?

Dans toute la suite, on note $S_{a,b}$ l'ensemble (éventuellement vide) des polynômes <u>non constants</u> vérifiant $E_{a,b}$.

Partie 1 : étude de quelques cas particuliers

Dans cette partie, on étudie l'ensemble $S_{a,b}$ dans quelques cas particuliers.

2. **Le cas particulier** $a = b$

   On suppose $a = b$ et on étudie donc l'équation $E_{a,a}$:

   $$P(X^2) = P(X+a)^2$$

   On considère P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les racines *distinctes* de P.

   (a) Préciser le nombre de racines distinctes du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+a)^2$.

   (b) Même question avec $R(X) = P(X^2)$ (on pourra distinguer selon le cas où 0 est ou non racine de P).

   (c) On suppose maintenant que P est dans $S_{a,a}$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = X^n$.

   (d) En déduire que pour $a \neq 0, S_{a,a} = \emptyset$. Préciser l'ensemble $S_{0,0}$.

3. **Le cas particulier** $(a,b) = (0,1)$

   On suppose ici $(a,b) = (0,1)$. On étudie donc l'équation $E_{0,1}$:

   $$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

   (a) Si Q est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, rappeler un résultat du cours sur le nombre de racines maximal de Q.

   Dans les quatre prochaines questions, on considère $P \in S_{0,1}$ et α une racine de P dans $\mathbb{C}$.

   (b) Montrer que α^2 est également une racine de P.

   (c) En déduire que $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.

   (d) Montrer de la même manière que $\alpha = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1$.

   (e) En déduire finalement que $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

   (f) Déterminer finalement exactement l'ensemble $S_{0,1}$.

Partie 2 : le polynôme minimal

Dans cette partie, on suppose que $S_{a,b}$ est non vide.

4. Montrer que tout élément de $S_{a,b}$ est unitaire.

5. Montrer que $S_{a,b}$ est stable par produit.

6. On considère P, Q deux éléments de $S_{a,b}$, de degrés égaux. On pose

   $$D(X) = P(X) - Q(X) \quad \text{et} \quad R(X) = P(X+a)D(X+b) + D(X+a)Q(X+b)$$

   En raisonnant sur les degrés, montrer que D est nul. Que peut-on en déduire ?

7. En déduire que $S_{a,b}$ possède un unique polynôme de degré minimal, et que celui-ci est unitaire.

   Le polynôme qu'on vient de mettre en évidence s'appelle *polynôme minimal* de l'équation $(E_{a,b})$. Dans la suite de cette partie, on le note M, et on note $m = \deg(M) \in \mathbb{N}^*$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Montrer que, si $A, B \in \mathbb{C}[X]$, on a :
$$A^n - B^n = \prod_{k=1}^{n} (A - \omega_k B)$$
9. En déduire que si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P^n \in S_{a,b}$, alors $P \in S_{a,b}$.
   On considère désormais un polynôme $P \in S_{a,b}$, de degré $n \geq 1$. On note $\delta = m \wedge n$. Il existe donc $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $m = \delta r, n = \delta s$, et $r \wedge s = 1$.
10. Montrer que M^s et P^r ont le même degré. En déduire qu'ils sont égaux.
    On en déduit que M et P ont les mêmes racines distinctes, disons $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ dans $\mathbb{C}$. On note donc
$$M = \prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \quad \text{et} \quad P = \prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{\beta_k}$$
11. Pour $k \in [|1, q|]$, montrer qu'il existe un entier γ_k tel que $\alpha_k = \gamma_k r$.
12. En utilisant $Q = \prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{\gamma_k}$ ainsi que la question 8, en déduire que $r = 1$, donc que $P = M^s$.
13. Montrer finalement que $S_{a,b} = \{M^n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Partie 3 : existence d'un polynôme minimal de degré $1, 2$ **ou** 3 Dans cette partie, on cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que $S_{a,b}$ soit non vide et possède un polynôme minimal de degré $1, 2$ ou 3. Afin de simplifier les calculs, on pose
$$c = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad d = \frac{b-a}{2}$$

14. **Le cas du degré** 1
    (a) Montrer que si $P \in S_{a,b}$ est de degré 1, alors $P = X - c$.
    (b) Montrer que si $X - c \in S_{a,b}$, alors $c = d^2$.
    (c) Si cette dernière condition est réalisée, quel est l'ensemble $S_{a,b}$?
15. **Le cas du degré** 2

    Dans cette question, on suppose $c \neq d^2$. D'après la question précédente, $S_{a,b}$ ne contient aucun polynôme de degré 1. Le but de cette question est d'étudier à quelle condition $S_{a,b}$ contient un polynôme de degré 2, nécessairement unitaire. On pose $P = (X-c)^2 + \alpha(X-c) + \beta$ avec α, β des constantes.
    (a) Montrer que si $P \in S_{a,b}$, alors $\alpha = 0$.
    (b) En déduire que $P \in S_{a,b} \iff \alpha = 0, \beta = \frac{1}{4} - c$ et $d^2 = \frac{1}{4}$.
    (c) Réciproquement, on suppose que $d^2 = \frac{1}{4}$. Que cela signifie-t-il sur a, b ? On suppose également $c \neq \frac{1}{4}$. Montrer que
$$S_{a,b} = \{M^n, n \in \mathbb{N}^*\}$$
    avec $M = (X-c)^2 + \frac{1}{4} - c$.
16. **Le cas du degré** 3

    Dans cette question, on suppose $d^2 \neq \frac{1}{4}$ et $c \neq d^2$. $S_{a,b}$ ne contient donc aucun polynôme de degré 1 ou 2. On pose $P = (X-c)^3 + \alpha(X-c)^2 + \beta(X-c) + \gamma$ avec α, β, γ des constantes, et on cherche à quelle condition $S_{a,b}$ contient un tel polynôme. On suppose donc que $P \in S_{a,b}$.
    (a) Montrer que $\alpha = 0$, puis que $\gamma = 0$.
    (b) En réécrivant $E_{a,b}$, en déduire $\beta = -\frac{9}{4}$.
    (c) Montrer finalement $c = \frac{25}{16}$ et $d = \pm\frac{1}{4}$.
    (d) En déduire que $\{a, b\} = \{\frac{21}{16}, \frac{29}{16}\}$ et préciser la factorisation de P.
    (e) Conclure.