DS 5

Extrait du rapport CC INP 2019 :
« L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours. Sont ainsi valorisés :

— L'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base.
— Les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur.
— Le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir, a minima, la moyenne. »
Pas de calculatrice, pas de documents, une tête (bien faite), du papier, des stylos. S'il vous plaît, composez sur des **copies simples**, en les numérotant toutes et en mettant bien votre nom sur chacune. Pas de blanco. Bon courage !

Exercice 1 *Limites et continuité*

Les trois questions de cet exercice peuvent se traiter indépendamment

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner la définition avec des quantificateurs de
   — f admet l comme limite en a.
   — f admet l comme limite à gauche en a.
   — f admet l comme limite à droite en a.

   (b) En utilisant ces définitions, redémontrer le résultat du cours : Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, alors f est continue en a.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On suppose bien connue la fonction partie entière, ainsi que ses propriétés.
   On note $f : x \mapsto x(x - \lfloor x \rfloor)$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la continuité ainsi que la continuité à gauche et à droite de f en a.
   (c) Donner l'allure de la courbe de f sur $[0,5[$, en mettant bien en évidence les points de discontinuité.
3. (a) On rappelle l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires : soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; alors, pour tout $\gamma \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

   Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I à valeurs réelles, telle que

   $$\mathrm{Im}(f) \subset \{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

   Montrer que f est constante.

   (b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

   Étudier les intervalles sur lesquels f est continue ; simplifier $\tan \circ f$; et déterminer une expression simple de f (pas nécessairement dans cet ordre).

Problème 2

Soit G l'ensemble des applications continues g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, g(x+y)+g(x-y) = 2(g(x)+g(y)).$$

1. (a) Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Simplifier :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}).$$

Dans toute la suite de la question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels définie par :

$$u_0 = 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 2u_1.$$

(b) Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Exprimer, en fonction de u_1 :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}).$$

(c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n et de u_1.

2. Soit g un élément de G.

(a) Préciser la valeur de $g(0)$.

(b) A l'aide de la question 1, montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, g(nz) = n^2 g(z).$$

(c) Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}, g(nz) = n^2 g(z).$$

(d) Montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, g(rx) = r^2 g(x).$$

(e) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = t^2 g(1).$$

3. En déduire l'ensemble G.

Problème 3

Partie A.

Soit a un réel positif ou nul. On considère les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = a,\ b_0 = 1, \quad \text{et : } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

Ces relations définissent bien une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une unique suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il n'est pas demandé de le montrer.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ on a

a. $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$,

b. $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$.

2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$$

3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leq a_n - b_n$$

puis que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n}|1-a|$$

4. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.

Partie B.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

1. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** sur I vers f ssi pour tout $x \in I$, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $f(x)$.

a. Ecrire la proposition logique (avec des quantificateurs) correspondant à la définition de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f.

b. On pose, uniquement dans cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n. \end{array}$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur I vers f ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

a. Expliquer la différence entre la définition de la convergence uniforme et celle de la convergence simple.

b. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f.

c. On pose, uniquement dans cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{array}{rcl} [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n. \end{array}$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$.

3. On suppose dans cette question que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f. Montrer que f est continue sur I.

4. On suppose qu'il existe une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq |u_n|.$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f.

Partie C.
Désormais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent les suites de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ en posant :

$$a_0(x)=x,\ b_0(x)=1, \quad \text{et : } \forall n\in\mathbb{N}, a_{n+1}(x)=\frac{a_n(x)+b_n(x)}{2} \ \text{ et } \ b_{n+1}(x)=\sqrt{a_n(x)b_n(x)}$$

La partie A montre donc que les suites de fonctions (a_n) et (b_n) convergent simplement sur $[0,+\infty[$ vers une certaine fonction f.

1.
   a. Déterminer $f(1)$ et $f(0)$.
   b. Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $\sqrt{x}\le f(x)\le\frac{1+x}{2}$.

2. Soit $A>0$ un réel. Montrer que les suites de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0,A]$ vers f. (On pourra utiliser les questions A.3 et B.4).

3. En déduire que la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.