DS 4

Le devoir est composé de trois exercices et deux problèmes. Soignez la **rédaction**, la **présentation**, l'**orthographe**. Préférez en faire peu, mais bien.

Exercice 1 *Ensembles*

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-1}{1-\overline{z}} \end{cases}$
   (a) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \quad |f(z)| = 1$.
   (b) Résoudre l'équation $f(z) = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.
   (c) L'application f est-elle injective ? surjective ? Justifier.
   (d) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrer que $f\left(e^{i\theta}\right) = e^{i\theta}$.
   (e) En déduire $\mathrm{Im} f$.
2. Soit $f : E \to F$ une application (avec E et F deux ensembles).
   (a) Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \subset E,\ f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)) = A$.
   (b) Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall B \subset F,\ f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) = B$.

Exercice 2 *Exercice technique sur les suites*

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $b_0 = 1$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = 2\sqrt{b_n}$$

1. Justifier que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \ln(b_n)$ est arithmético-géométrique.
3. En déduire le terme général de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer le terme général de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son comportement en $+\infty$.

Exercice 3 *Bornes supérieure et inférieure*

1. Questions de cours :
   (a) Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Rappeler la définition de la borne supérieure d'une partie de E.
   (b) Énoncer la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
   (c) Donner, sans démonstration, un exemple d'une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure mais pas de maximum.

2. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose

$$|A| = \{|x|, \quad x \in A\}$$

   (a) Justifier que $\sup(A)$ et $\inf(A)$ existent.
   (b) Montrer que $\max\{\sup(A), -\inf(A)\}$ est un majorant de $|A|$ et en déduire que $\sup|A|$ existe.
   (c) Montrer que $\sup A \leqslant \sup(|A|)$ et que $-\inf A \leqslant \sup(|A|)$.
   (d) Déduire de ce qui précède l'égalité :

$$\sup(|A|) = \max\{\sup(A), -\inf(A)\}.$$

Problème 4 *Une suite définie par une somme*

Dans le problème, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictements positifs, décroissante et de limite nulle. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \leq u_n$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite s et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite s.
   (c) En déduire que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s.
2. Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

   admet une limite. On **note**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

   cette limite.
3. (a) Etablir pour tout réel t positif et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

   (b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$$

   (c) En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k}$$

Vous avez trouvé la valeur de la somme d'une série, concept que nous retrouverons en fin d'année et qui vous occupera beaucoup l'an prochain.

Problème 5 *Une suite récurrente*

1. Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{3}{1+x^2}$$

   (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 + x - 3 = 0$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$, notée α. Vérifier que $1 < \alpha < 2$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = f \circ f(x) - x$$

   On admet que l'on peut factoriser h sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h(x) = -\frac{(x^2 - 3x + 1)(x^3 + x - 3)}{(x^2+1)^2 + 9}$$

(a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a exactement trois solutions distinctes : α défini à la question 1.b et deux autres solutions β, β' telles que $0 < \beta < \alpha < \beta'$.

(b) Déterminer le signe de h sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que $f(\beta) = \frac{1}{\beta} = \beta'$ et $f(\beta') = \frac{1}{\beta'} = \beta$.

On considère désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
4. (a) On suppose que $u_0 = 1$. Calculer u_1 et u_2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

   (b) On suppose que $u_0 = 2$. Calculer u_1 et u_2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
5. (a) Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) On suppose que $u_0 \in [0, \beta]$. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

   Pour la suite de l'exercice, on admet le résultat suivant : quelle que soit la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}_+$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

   (c) Comparer les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas particuliers $u_0 = 1$ et $u_0 = 2$.

   (d) On suppose que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Montrer que $l \in \{\alpha, \beta, \beta'\}$.

   (e) Si $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l', quelles sont les valeurs possibles de l' ?

   On étudie désormais la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon quelques cas particuliers de u_0.
6. On suppose que $u_0 = \alpha$. Quelle est la particularité de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
7. On suppose que $u_0 \in \{\beta, \beta'\}$. Quelle est la particularité des suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$? Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
8. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [0, \beta[$.

   (a) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, \beta]$.

   (b) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\beta', 3]$.

   (c) En utilisant les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.

   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?