DS 3

Extrait du rapport de concours CC INP 2019 :
« Voici quelques conseils pour les futurs candidats :

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.
2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.
3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.
4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles mêmes si elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.
5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé. »

Suivez scrupuleusement ces conseils en traitant ce sujet composé de quatre exercices et de deux problèmes, de difficulté relativement croissante. La résolution parfaite des quatre premiers exercices assurera une très bonne note (au moins 15). Les élèves motivés et ayant eu un bon résultat au précédent DS (plus de 15), et eux seuls, peuvent, s'ils le souhaitent, ne pas traiter les exercices 1 à 3 et commencer par le traitement de l'exercice 4 puis des problèmes : le barème sera adapté dans ce cas.

Exercice 1 *Exercice technique*

Les questions 1, 2, 3 sont indépendantes.

1. Déterminer une primitive de $f : t \mapsto \sin(2t)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la fonction y de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \cos(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

3. (a) Pour quels $x \in \mathbb{R}$ le nombre $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1-e^{2t}} \mathrm{d}t$ est-il bien défini ?

   (b) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad \frac{1}{1-t^2} = \frac{\alpha}{1-t} + \frac{\beta}{1+t}$$

   (c) À l'aide d'un changement de variable simple et de la question précédente, calculer, pour les x pour lesquels cela a un sens, $F(x)$.

Exercice 2 *Nombres complexes*

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 3 *Une équation trigonométrique*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) - \cos(3x) + \cdots - \cos((2n-1)x) + \cos(2nx) = 0 \qquad \text{(F)}$$

qui peut s'écrire :

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \cos(px) = 0 \qquad \text{(F)}$$

1. Si $p \in [\![0, 2n]\!]$, que vaut $\cos(p\pi)$? En déduire que $x = \pi$ n'est pas solution de (F).
2. Justifier qu'il suffit de résoudre (F) pour $x \in]-\pi, \pi[$, en expliquant comment en déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p e^{ipx} = \frac{1 + e^{i(2n+1)x}}{1 + e^{ix}} \quad \text{et en déduire que} \quad \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p e^{ipx} = e^{inx} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

4. En déduire que $x \in]-\pi, \pi[$ est solution de (F) si, et seulement si :

$$\cos(nx) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) = 0$$

5. Résoudre (F) sur $]-\pi, \pi[$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 *Une intégrale paramétrée par deux entiers*

Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note :

$$I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q \mathrm{d}t$$

1. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I(p, q)$, puis calculer $I(0, 0)$, $I(1, 0)$ et $I(1, 1)$.
2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable, la relation de symétrie : $I(p, q) = I(q, p)$.
3. Que vaut $I(p, 0)$?
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer la relation $I(p, q+1) = \dfrac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$.
5. Déduire des deux questions précédentes la valeur de $I(p, 1)$, pour $p \in \mathbb{N}$, puis celle de $I(p, 2)$.
6. Montrer que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $I(p, q) = \dfrac{p!\ q!}{(p+q+1)!}$.
   Conseil : s'inspirer du travail réalisé dans la question précédente.
7. En déduire la valeur de l'intégrale $J(p, q) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p+1} (\cos\theta)^{2q+1} \mathrm{d}\theta$.
   Indication : utiliser le changement de variable $t = \sin^2(\theta)$.

Problème 5 *Une équation fonctionnelle*

Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1. Montrer que les fonctions cos et ch appartiennent à $\mathscr{E}$.
2. Soit f dans $\mathscr{E}$. Montrer que pour tout réel α, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(\alpha x)$ appartient à $\mathscr{E}$.
3. Soit f dans $\mathscr{E}$. Montrer que :
   (a) $f(0)$ vaut 0 ou 1 ;
   (b) Si $f(0) = 0$, alors f est identiquement nulle ;
   (c) Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.
   On fixe dans les questions 4 et 5 $f \in \mathscr{E}$.
   (d) Montrer que
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x+y)+f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$
   (e) En déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}^2$ telle que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x).$$
   (f) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \mu y = 0$ en séparant les cas $\mu > 0, \mu < 0$ et $\mu = 0$.
   (g) En déduire *soigneusement* les éléments de $\mathscr{E}$ qui sont deux fois dérivables.

Problème 6 *Intégrale de Gauß*

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^x \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = (x+1)f(x)f(x+1)$$

1. En effectuant une intégration par parties, montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, (x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)$$
2. En déduire que : pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x+1) = g(x)$.
3. En déduire la valeur de $g(n)$ pour tout entier n.
4. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
5. Soit $x \in]0,1[$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\frac{x+n+1}{n+2} g(n+1) \leq g(x+n) \leq \frac{x+n+1}{n+1} g(n)$$
   (b) En déduire la valeur de $g(x)$.
6. Déduire des questions précédentes que g est constante sur $\mathbb{R}_+$.
7. À partir de l'inégalité $f(x+1) \leq f(x) \leq f(x-1)$, montrer que :
   $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
8. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t \in [0,x]$:
   $$\left(1 - \frac{t^2}{x^2}\right)^{x^2} \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{x^2}\right)^{-x^2}$$

(b) En posant $t = x\sin u$ d'une part, $t = x\tan u$ d'autre part, en déduire que :

$$x f(2x^2+1) \leq \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leq x f(2x^2-2)$$

(c) En déduire finalement que la limite

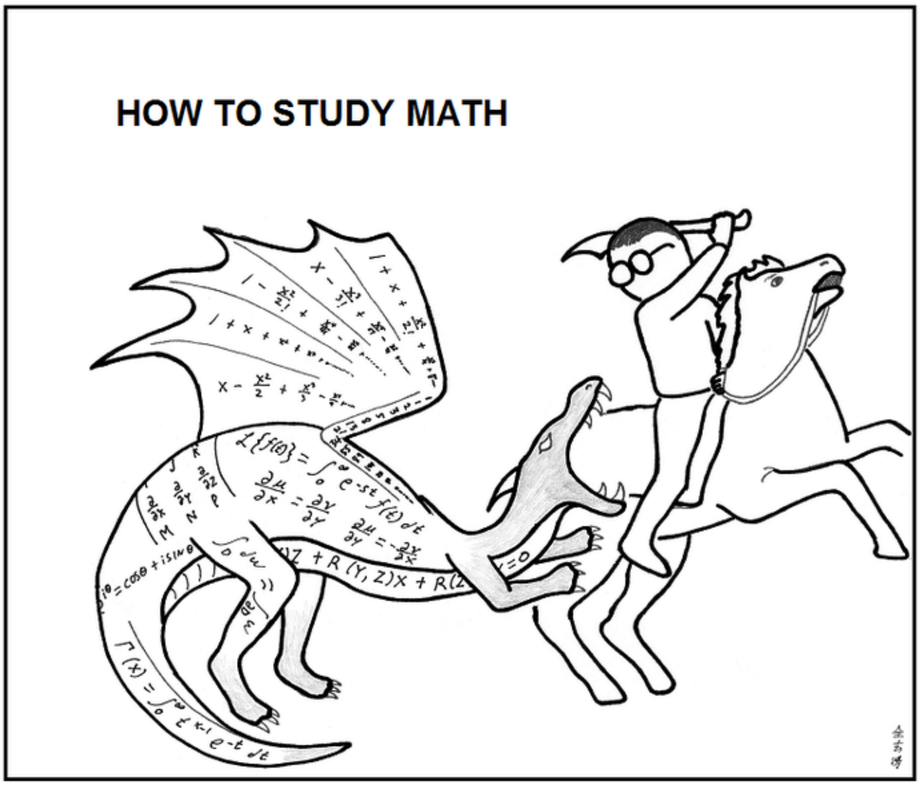
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ce résultat peut s'écrire, après changement de variable et définition correcte du membre de gauche (que vous ne verrez que l'an prochain) sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

C'est l'intégrale de Gauß, qui intervient dans de nombreux domaines des mathématiques et notamment en théorie des probabilités lorsque l'on définit la loi normale.



Don't just read it; fight it!

--- Paul R. Halmos