DS 2, le 14/10/2020

Ce DS, qui dure 4 heures, est constitué de 6 exercices indépendants, de difficulté relativement progressive.
N'oubliez pas de faire très attention à la rédaction et au soin apportés à votre copie.

Exercice 1 : calculs indépendants

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer les nombres :

$$\mathrm{A}_n = \sum_{p=1}^{n} (2p - t) \qquad \mathrm{B}_n = \sum_{i=2}^{n+1} 5t^{i+1} \qquad \mathrm{C}_n = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} 3^k$$

2. Que valent $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ et $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{6}\right)\right)$?
3. Déterminer les limites suivantes :

   (a) $3x^2 - \mathrm{e}^{2x} + 2$ quand $x \to +\infty$

   (b) $\dfrac{u^3}{\cos^2(u)}$ quand $u \to 0$

   (c) $\dfrac{\ln(\ln t)}{\ln t}$ quand $t \to +\infty$

Exercice 2 : Un système

Soit $m \in \mathbb{R}$. Étudier, en fonction des valeurs du paramètre m, les solutions du système suivant (d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$). On prendra bien soin de faire une interprétation géométrique sommaire à chaque cas rencontré.

$$\begin{cases} x + (m+1)y &= m+1 \\ mx + (m+4)y &= 6 \end{cases}$$

Exercice 3 : Une somme

On pose, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3.$$

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Développer $(a+b)^3$ et $(a+b)^4$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathrm{S}_n = 2n^4 - n^2.$$

Exercice 4 : Une fonction

On considère la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{\sin t}{2 - \cos t}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}$, étudier la parité, l'imparité de f et son éventuelle périodicité.
2. Montrer que f est bornée.
3. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition, exprimer sa dérivée, et montrer que pour tout $t \in \mathcal{D}$, $f'(t)$ est du signe de $2\cos(t) - 1$.
4. En déduire le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.
5. En déduire le maximum et le minimum de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 5 : Une équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)f(y) + f(x+y) = xy$$

Dans les questions 1 à 4, on fixe une fonction f qui vérifie cette propriété.

1. Montrer que $f(0) = 0$ ou $f(0) = -1$.
2. On suppose que $f(0) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
3. On suppose dans cette question et la suivante que $f(0) = -1$. Montrer que $f(1) = 0$ ou $f(-1) = 0$.
4. Montrer que si $f(1) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad f(t) = t - 1$. Montrer que si $f(-1) = 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad f(t) = -t - 1$.
5. Conclure l'exercice.

Exercice 6 : Une suite

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 1.$$
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite finie l.
2. (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x.$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall n, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+k+1} \leqslant \ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leqslant \frac{1}{n+k}.$$
3. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \leqslant \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n.$$
   (b) En déduire que :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2.$$