DS 2

Exercice 1 *Nombres complexes (durée suggérée : 30 minutes)*

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 2 *Systèmes linéaires (durée suggérée : 30 minutes)*

On considère deux systèmes de trois équations linéaires d'inconnues réelles (x,y,z) dépendant des paramètres réels a et b

$$(S) : \begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases} \qquad (S') \begin{cases} x+ \quad z+aby & =b \\ (a-1)z+b(1-a)y & =1-b \\ b(1-a)(2+a)y & =2-b-ab \end{cases}$$

1. Préciser les opérations élémentaires assurant que les deux systèmes sont équivalents.
2. Préciser, suivant les valeurs des paramètres a et b, l'ensemble de (S). Lorsque le système admet un unique triplet solution, on ne cherchera pas à le calculer. On donnera une interprétation géométrique dans chaque cas.

Exercice 3 *Une suite (durée suggérée : 45 minutes)*

Soit t la suite réelle définie par son premier terme $t_0 = -1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ t_{n+1} = (n+2)t_n + 2n! \qquad (RR)$$

Attention : $2n!$ désigne le nombre $2 \times (n!)$, et non pas $(2n)!$.
L'objectif de l'exercice est de déterminer le terme général de cette suite par deux méthodes indépendantes. On ne pourra donc pas utiliser le résultat de la question 1 dans la question 2.

1. **Première méthode.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = (n+1)! - 2n!$.
2. **Deuxième méthode.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{t_n}{(n+1)!}$.
   (a) A l'aide de la relation (RR), montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s_{k+1} - s_k = \dfrac{2}{(k+1)(k+2)}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n - s_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)(k+2)}$.
   (c) Déterminer deux réels α et β tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$, $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{\alpha}{x+1} + \dfrac{\beta}{x+2}$.
   (d) En déduire que $s_n = 1 - \dfrac{2}{n+1}$.
   (e) A l'aide de la question précédente, retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 4 *Une équation trigonométrique (durée suggérée : une heure)*

Résolution dans un cas particulier

On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire que x est solution de (E) si et seulement si

$$\cos x = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

3. En déduire les solutions de (E).

Résolution dans le cas général
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \cos(x) + \cos(2x) - \cos(3x) + \cdots - \cos((2n-1)x) + \cos(2nx) = 0 \qquad \text{(F)}$$

qui peut s'écrire :

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \cos(px) = 0 \qquad \text{(F)}$$

4. Si $p \in [\![0, 2n]\!]$, que vaut $\cos(p\pi)$? En déduire que $x = \pi$ n'est pas solution de (F).
5. Justifier qu'il suffit de résoudre (F) pour $x \in]-\pi, \pi[$, en expliquant comment en déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p e^{ipx} = \frac{1 + e^{i(2n+1)x}}{1 + e^{ix}} \quad \text{et en déduire que} \quad \sum_{p=0}^{2n} (-1)^p e^{ipx} = e^{inx} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

7. En déduire que $x \in]-\pi, \pi[$ est solution de (F) si et seulement si

$$\cos(nx) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) = 0$$

8. Résoudre (F) sur $]-\pi, \pi[$ puis sur $\mathbb{R}$. Est-ce cohérent avec la question 3 ?

Exercice 5 *Fonctions trigonométriques réciproques (durée suggérée : le temps restant...)*

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < b < a$. On pose :

$$I = \left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right], \qquad f : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \arcsin(ax) + \arccos(bx). \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[$. Déterminer f' et montrer que f est strictement croissante.
2. Montrer que f réalise une bijection de I vers J avec

$$J = \left[\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{b}{a}\right), \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

3. Soit $x \in I$. Exprimer $\cos(f(x))$. Montrer que $\cos(f(x))$ est du signe de $-x$.
4. Soit $x \in I$. Exprimer $\sin(f(x))$ puis montrer que :

$$\cos^2(f(x)) = x^2(a^2 + b^2 - 2ab\sin(f(x))).$$

5. Pour tout $y \in J$, déterminer une expression de $f^{-1}(y)$.
6. Application : Résoudre les équations :

$$\arcsin\left(\frac{4x}{5}\right) + \arccos\left(\frac{3x}{5}\right) = 1 \ \text{ et } \ \arcsin\left(\frac{4x}{5}\right) + \arccos\left(\frac{3x}{5}\right) = 0$$

On admettra que pour $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{3}{5}$, on a $1 \in J$ et $0 \notin J$.
