DS 1, le 23/09/2020

Ce DS, qui dure 4 heures, est constitué de 3 exercices et un problème, avec un barème très approximatif, mais qui dépassera tout de même certainement 20 points.

N'oubliez pas de faire très attention à la rédaction et au soin apportés à votre copie. Bon courage !

Exercice 1 : Quelques équations ($\sim$ 6 points)

1. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$\frac{7x+9}{4} + x = \frac{5x}{2} + 3$$
2. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On discutera suivant la valeur du paramètre m.
$$3(m-2)x + m(4x-7) = 3(m-1)$$
3. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$:
$$x - 1 = \sqrt{x} + 2$$
4. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$|x-2| = x + |2x+8|$$
5. Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$:
$$x > \frac{1}{x}$$

Exercice 2 : Une suite ($\sim$ 4 points) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses premiers termes

$$u_0 = 2, u_1 = 1$$

et la relation
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$$

Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-2)^n + 3^n$$

Exercice 3 : Des fonctions ($\sim$ 5 points)

1. Étudier les deux fonctions $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$ et $g : x \mapsto \frac{2}{x}$ (on attend les domaines de définition, de dérivabilité, les dérivées, les variations et les limites aux bornes des domaines de définition). Construire dans un même repère l'allure des courbes de ces fonctions.
2. Vérifier que le point A de coordonnées $(1, 2)$ est commun aux deux courbes, et que les deux courbes admettent la même tangente en ce point. Quelle est l'équation de cette tangente ?
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la droite d'équation $y = mx - m + 2$. Montrer qu'elle passe par A et calculer, en fonction de m, les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec les deux courbes précédentes.
4. En déduire que les deux courbes représentatives de f et de g se recoupent en un unique point B distinct de A. Établir les équations des tangentes en B aux deux courbes.

Problème 4 : Fonction cosinus hyperbolique et fonction argument cosinus hyperbolique ($\sim$ 10 points)

On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La première question est une question de cours, on ne pourra donc pas utiliser les propriétés démontrées en cours sur le cosinus hyperbolique.

1. Réaliser une étude complète de ch : parité/imparité, variations, limites, signe.
2. Montrer que la fonction ch réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

   On appelle arg ch (argument cosinus hyperbolique) la bijection réciproque, définie sur $[\,1\,;+\infty\,[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
3. Rappeler (sans preuve) la relation fondamentale de la trigonométrie hyperbolique, et en déduire que, pour tout $y \in [\,1\,;+\infty\,[$:
   $$\mathrm{sh}(\arg\mathrm{ch}(y)) = \sqrt{y^2 - 1}$$
4. Montrer que la fonction arg ch est dérivable sur $]1, +\infty[$ puis que :
   $$\forall y > 1, \quad (\arg\mathrm{ch})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$
5. Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.
   (a) Montrer que f est bien définie sur $[\,1\,;+\infty\,[$.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $]\,1\,;+\infty\,[$.
   (c) Dériver f sur $]\,1\,;+\infty\,[$.
   (d) En déduire une autre expression de la fonction arg ch.