DS 1

Vous avez quatre heures pour traiter ce sujet, composé de trois exercices et d'un problème. Le sujet est probablement trop long pour les quatre heures et la notation sera adaptée. **Ne faites pas tout, mais faites-le bien.**
Toutes les consignes qui suivent sont valables pour tous les devoirs de l'année.
Vous laisserez une marge en haut sur la première page et laisserez la marge de gauche de votre copie libre pour les annotations.
Les exercices sont indépendants les uns des autres. Au sein d'un même exercice, vous pouvez admettre un résultat que vous n'arrivez pas à démontrer : veillez alors à le formuler *clairement* sur votre copie.
On rappelle que toute affirmation doit être justifiée (sauf indication contraire), que toute variable doit être introduite. De manière générale, vous veillerez à soigner la rédaction, l'orthographe et la propreté, qui formeront des éléments non négligeables de la notation.
L'usage des calculatrices et plus généralement de tout appareil électronique est interdit.

Exercice 1 *Proche du cours (Temps suggéré : 45 minutes)*

1. Résoudre l'équation $2x+3=|x+1|$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0=2,\quad u_1=5,\quad \text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$$

   Montrer que :

$$\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\quad u_n=2^n+3^n$$

3. Soit α un réel. *Définir* la fonction puissance $f_\alpha : x\mapsto x^\alpha$: ensemble de définition et formule de définition. On distinguera bien tous les cas sur α !
4. Énoncer et démontrer deux propriétés ayant trait aux puissances d'un produit de deux nombres et à la puissance de la puissance d'un nombre (dans le cas où l'exposant n'est pas entier).
5. Énoncer et démontrer la formule de dérivation de f_α (dans le cas où l'exposant n'est pas entier).

Exercice 2 *Une équation fonctionnelle (Temps suggéré : 45 minutes)*

Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'équation :

$$(E):\quad \text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\quad f(x)f(y)-f(xy)=x+y$$

1. Quel raisonnement est adapté pour résoudre ce type de problème ?
2. Soit f une fonction vérifiant l'équation (E).
   (a) Quelle(s) valeur(s) peut prendre $f(0)$?
   (b) On suppose que $f(0)=0$. En évaluant l'équation (E) en des réels bien choisis, montrer que $0=1$.
   (c) On suppose que $f(0)\neq 0$. Déterminer, pour $x\in\mathbb{R}$, ce que peut valoir $f(x)$.
3. Conclure en déterminant soigneusement toutes les fonctions vérifiant (E).

Exercice 3 *Une équation où on ne commettra pas d'impair (45 minutes)*

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les couples d'entiers naturels (x,y) qui vérifient l'équation $x^y=y^x$ et tels que $0<x<y$.
On définit la fonction f par la formule $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ valable pour tout $x\in\mathbb{R}$ pour lequel cette formule ait un sens.

1. Étudier f : domaine de définition, de dérivabilité, calcul de la dérivée, limites aux bornes du domaine de définition, tableau de variations. Tracer la courbe représentative de f, sur laquelle on fera figurer les tangentes en 1 et en e.
2. Montrer que si (x,y) est une solution de l'équation, alors $f(x)=f(y)$.
3. En déduire *soigneusement* que si (x,y) est une solution de l'équation, alors $x\in]1,e[$ et $y\in]e,+\infty[$.

4. Finir la résolution de l'équation.

Problème 4 *La fonction de Lambert (Temps suggéré : le temps restant, probablement trop court)*

On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f et justifier que f est dérivable sur son domaine de définition.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Calculer la dérivée de la fonction f puis dresser le tableau des variations de f. On fera notamment figurer $f(-1)$ dans le tableau.
4. Tracer sommairement le graphe de f.
5. Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $[-\frac{1}{e},+\infty[$.

Dans la suite en notant

$$g : \begin{array}{ccc} [-1,+\infty[& \longrightarrow & [-\frac{1}{e},+\infty[\\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$$

on posera $W = g^{-1}$ l'application réciproque de g.

6. Déterminer la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.
7. Que vaut $g(1)$? En déduire que $W(e) = 1$. Calculer également $W(0)$ et $W(-\frac{1}{e})$.
8. Dresser le tableau des variations de W sur son domaine de définition (déterminer la limite de W en $+\infty$).
9. Justifier que W est positive sur $[0,+\infty[$.
10. Montrer que W est dérivable sur $]-\frac{1}{e},+\infty[$ et que pour tout $x \in]-\frac{1}{e},+\infty[\setminus\{0\}$,
$$W'(x) = \frac{W(x)}{x\big(1+W(x)\big)}.$$
11. Montrer que pour tout $x \in [e,+\infty[$, $W(x) \leq \ln x$. On pourra étudier la différence et utiliser les deux questions précédentes.
12. Montrer que pour tout $x \in [e,+\infty[$, $\ln x - \ln(\ln x) \leq W(x)$.
13. Conclure que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{W(x)}{\ln x} = 1.$$
14. Soit $f : x \mapsto \ln(x) + x$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer sa bijection réciproque au moyen de la fonction W.

The first math class.