

Exercice 1 Probabilités

Une puce se déplace à intervalles réguliers sur un triangle équilatéral ABC. Elle se situe initialement (au temps $n = 0$) en A.

Si elle est en A à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n + 1$ de manière équiprobable.

Si elle est en B à un instant n donné, alors elle se déplace sur un des deux autres sommets à l'instant $n + 1$ de manière équiprobable.

Si elle est en C à un instant, alors elle reste en C à l'instant suivant.

On note A_n (resp B_n, C_n): "La puce est en A (resp B, C) à l'instant n "

On note u_n (resp v_n, w_n): $P(A_n)$ (resp $P(B_n), P(C_n)$)

1. Déterminer $u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}$ en fonction de u_n, v_n, w_n .
2. Que valent u_0, v_0 et w_0 ?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2^{-n-1}((1 + (-1)^n)), \quad v_n = -2^{-n-1}(-1 - (-1)^n) \quad \text{et} \quad w_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

4. Quelles sont les limites de u_n, v_n, w_n lorsque $n \rightarrow +\infty$? Interpréter.

Exercice 2 Un jeu vidéo

On considère un jeu vidéo comprenant N niveaux. Un joueur nommé L. essaie le jeu pour la première fois. Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on considère que si L. a passé les $(k - 1)$ premiers niveaux, la probabilité qu'il réussisse le k -ième niveau est de $\frac{1}{k}$. S'il ne réussit pas à terminer le niveau k , il perd et le jeu s'arrête définitivement.

1. Quelle est la probabilité que le 2-ème niveau soit terminé par L. ?
2. De façon générale, si $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, quelle est la probabilité que le k -ième niveau soit terminé par L. ? En particulier, quelle est la probabilité qu'il finisse le jeu ?
3. Quelle est la probabilité qu'il perde exactement au niveau k ?
4. Quelle est la probabilité qu'il perde à un niveau inférieur (ou égal) à k ?
5. Sachant qu'il n'a pas réussi à finir le jeu, quelle est la probabilité qu'il ait perdu à un niveau $i \leq k$? Comment cette probabilité se comporte-t-elle quand $N \rightarrow +\infty$? Interpréter ce résultat.
6. Pour augmenter ses chances de succès, L. choisit finalement le mode de jeu "droit à une erreur". Dans ce mode, il peut finir le jeu en ne réussissant que $N - 1$ niveaux sur les N . Quelle est la probabilité qu'il finisse le jeu ?