Un DM un peu particulier : il est constitué d'exercices de base sur les espaces vectoriels. Tout le monde peut tout faire !

Exercice 1 *Vérifications*

1. On pose $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-2y+z=0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En déterminer une base.
2. On considère $F = \{P \in \mathbb{R}_7[X], (X^6+2) \text{ divise } P\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_7[X]$. En déterminer une base.

Exercice 2 *Espaces engendrés*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On se place dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos(kx), k \in [|0,n|]) = \mathrm{Vect}\left(x \cos^k x, k \in [|0,n|]\right)$$

Exercice 3 *Famille libre*

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 *Supplémentaires*

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de E et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de E. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ forment deux sous-espaces vectoriels de E, qui sont supplémentaires.