

Problème 0 *Polynômes de Tchebychev*

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. On se propose d'étudier les polynômes $P_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient la relation suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad (E)$$

Partie 1 : unicité et existence

1. On se donne deux polynômes R et S tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, R(\cos x) = S(\cos x)$$

Montrer que $R = S$.

2. En déduire que, si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, il y a au plus un polynôme vérifiant la relation (E).
 3. Montrer que P_0 et P_1 existent et déterminer leur valeur.
 4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos((n+2)x) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx)$$

5. En déduire par récurrence que double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n existe et que les polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$$

Partie 2 : factorisation

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le degré de P_n est n et que le coefficient dominant de P_n est 2^{n-1} (on pourra effectuer une récurrence double).
 7. Résoudre l'équation

$$\cos(nx) = 0$$

d'inconnue $x \in [0, \pi]$. En déduire que P_n admet n racines distinctes dans $[-1, 1]$.

8. En déduire l'ensemble des racines de P_n , puis sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
 9. En évaluant le polynôme P_n en un point bien choisi, en déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} \text{ si } n \text{ est pair, } 0 \text{ sinon.}$$

Partie 3 : extrema des polynômes de Tchebychev sur $[-1, 1]$

10. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|P_n(x)| \leq 1$.
 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $|P_n(x)| = 1$ d'inconnue $x \in [-1, 1]$; en déduire les extrema de P_n sur $[-1, 1]$ et les points en lesquels ces extrema sont atteints.

Partie 4 : arithmétique des polynômes de Tchebychev

12. Montrer que pour tout couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq m \leq n$, on a

$$P_m P_n = \frac{1}{2}(P_{n+m} + P_{n-m})$$

13. Pour un couple d'entiers naturels (m, n) tel que $m \leq n$, on se propose de déterminer le quotient $Q_{n,m}$ et le reste $R_{n,m}$ de la division euclidienne de P_n par P_m .

(a) On suppose $m < n < 3m$. Montrer que

$$Q_{n,m} = 2P_{n,m} \quad \text{et} \quad R_{n,m} = -P_{|n-2m|}$$

(b) Déterminer $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ lorsque n est de la forme $(2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

- (c) On suppose que $m > 0$ et que n n'est pas le produit de m par un entier impair. Montrer qu'il existe un unique entier $p \geq 1$ tel que $|n - 2pm| < m$ et que

$$Q_{n,m} = 2(P_{n-m} - P_{n-3m} + \cdots + (-1)^{p-1}P_{n-(2p-1)m}) \quad \text{et} \quad R_{n,m} = (-1)^p P_{|n-2pm|}$$

14. On cherche maintenant à déterminer le plus grand commun diviseur (ce qu'on notera désormais pgcd) à P_n et P_m . On fixe m et n deux entiers naturels, $g > 0$ le plus grand commun diviseur des entiers m et n , $m_1 = \frac{m}{g}$ et $n_1 = \frac{n}{g}$.
- (a) Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors $\frac{1}{2^{g-1}}P_g$ est le pgcd de P_n et P_m .
- (b) Montrer que si m_1 est pair ou n_1 est pair, alors P_n et P_m sont premiers entre eux.
- (c) Que peut-on dire du pgcd de P_n et P_m lorsque m et n sont impairs? Lorsque n et m sont deux puissances de 2 distinctes?
-