Exercice 1 *Théorème de Cesàro*

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. On veut montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge aussi vers l. On fixe $\varepsilon > 0$.

1. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ entraîne
$$|u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
2. Établir que pour tout entier $n \geq n_0$, on a
$$|v_n - l| \leq \frac{|u_1 - l + \cdots + |u_{n_0} - l|}{n} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$
3. En déduire qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$ entraîne
$$|v_n - l| \leq \varepsilon$$
4. Que dire de la réciproque : si $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$, a-t-on nécessairement $(u_n)_{n\geq 1}$ qui converge ?
5. Application : on fixe $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite $l > 0$. Montrer qu'alors
$$\sqrt[n]{u_n} \to l \text{ lorsque } n \to +\infty$$

Exercice 2 *Le lemme de sous-additivité de Fekete*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k \ ; \ k \geq n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les formules

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \ \text{ et } \ \overline{u}_n = \sup(U_n)$$

1. Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.
   Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dit que v est *plus petite* que w, et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leq w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est *plus grande* que v.
2. Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.
   Dans toute la suite du problème, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :
$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n$$
3. Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et $\overline{v}$.
4. Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites $u, \overline{u}$ et $\underline{u}$?
   On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *sous-additive* si pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leq u_i + u_j$.

   Dans le reste de l'exercice, on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive *et* sous-additive.

5. Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que

$$u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1}\}}{m}$$

6. En déduire que la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}$$

7. En conclure que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Le lemme de Fekete, qui dit que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sous-additive, alors $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, a de nombreuses applications en théorie des probabilités ainsi qu'en théorie des nombres.