Exercice 1 *Ensembles et applications*

Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{|z|} \end{array} \right.$.
   (a) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (b) Déterminer $\mathrm{Im} f$.
2. Soient a, b et c trois réels tels que $c \neq 0$.
   On considère l'application f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}, f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$.
   (a) Montrer que si $a^2 + bc = 0$, alors f est constante.
   Dans la suite, on suppose que $a^2 + bc \neq 0$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$.
   (c) Simplifier, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$, l'expression $f(f(x))$.
   (d) Déduire de ce qui précède que f établit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ sur un ensemble à préciser et expliciter sa réciproque.
3. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
   Soient A et B deux parties de E.
   (a) Montrer que $f^{\to}(B) \setminus f^{\to}(A) \subset f^{\to}(B \setminus A)$.
   (b) L'inclusion réciproque est-elle vérifiée quels que soient A, B et f ? (Si oui, on le prouvera, sinon on déterminera un contre-exemple.)
   (c) Dans cette question, on suppose que f est injective.
   Montrer que $f^{\to}(B) \setminus f^{\to}(A) = f^{\to}(B \setminus A)$.
   (d) En déduire que, si f est bijective de E sur F, alors $f^{\to}(E \setminus A) = F \setminus^{\to}(A)$, c'est à dire que l'image du complémentaire de A est le complémentaire de l'image de A.