Exercice 1 *Deux suites d'intégrales*

Pour tout entiern naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$$

On se propose d'étudier la suite I_n puis de donner l'expression de la suite I_n en fonction de n.

1. Calculer I_0, I_1, J_0.
2. (a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   (b) Montrer que la suite (I_n) converge vers une limite l appartenant à $[0,1]$.
   (c) Soit a un réel de $[0,1]$. En utilisant la relation de Chasles, montrer, pour tout entier naturel n, l'inégalité :
   $$I_n \leq a + (1-a)(1-a^2)^n$$
   en déduire l'inégalité $l \leq a$. Quelle est la valeur de l ?
3. (a) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de J_n et de n.
   (b) Donner l'expression de I_{n+1} en fonction de I_n et de J_n, puis montrer que :
   $$I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$$
   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
   $$I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Problème 1 *Une équation différentielle et un recollement*

Résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction

$$\varphi : x \mapsto 3xe^{-x^2} - 1.$$

1. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer la dérivée de φ.
2. Dresser le tableau des variations de φ et représenter l'allure de la courbe représentative de φ.

On considère l'équation différentielle suivante, d'inconnue y :

$$xy' - (1-2x^2)y = 1 - 2x^2. \tag{E}$$

3. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x} - 2x$.
4. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]0,+\infty[$.
5. Trouver une solution particulière à (E) (on pourra la chercher sous forme de fonction constante), puis écrire l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.
6. Déterminer également l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty,0[$.

On souhaite désormais déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui satisfont l'équation (E).

7. Montrer que φ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
8. Justifier que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui satisfait l'équation (E) alors il existe deux constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) = \begin{cases} C_1 xe^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]0,+\infty[, \\ -1 & \text{si } x = 0, \\ C_2 xe^{-x^2} - 1 & \text{si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$$
9. Avec les notations de la question précédente, montrer, en utilisant la continuité de f', que $C_1 = C_2$.
10. Déterminer finalement toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation (E).