DM 3, pour le 9 novembre

Problème 1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = 2p+1$. Soit $a \in \mathbb{C}^*$.
Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles mais font intervenir la partie 1.

Partie 1 : Résolution de l'équation $\dfrac{a+z}{a-z} = w$.

Soit $w \in \mathbb{C}$. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$:

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \frac{a+z}{a-z} = w.$$

1. Donner, selon les valeurs de w, l'ensemble des solutions de (E_1).
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on suppose que $w = \mathrm{e}^{i\alpha}$ et $w \neq -1$.
   (a) Simplifier l'expression :
   $$\frac{w-1}{w+1}.$$
   (b) En déduire, dans ce cas, une expression des solutions de (E_1) ne faisant intervenir que a, α et la fonction tangente.

Partie 2 : Résolution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} z^{2k} a^{n-2k} = 0$.

On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} z^{2k} a^{n-2k} = 0.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Exprimer $(z+a)^n$ puis $(-z+a)^n$ sous forme de sommes.
   (b) En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} z^{2k} a^{n-2k}$ faisant intervenir $(z+a)^n$ et $(-z+a)^n$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ de l'équation :
   $$\left(\frac{z+a}{-z+a}\right)^n = -1.$$
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E_2) que l'on exprimera en utilisant la fonction tangente.

Partie 3 : Résolution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z+a}{a-z}\right)^k = 0$.

On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$:

$$(\mathrm{E}_3) \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z+a}{a-z}\right)^k = 0.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.
   Montrer que z est solution de (E_3) si et seulement si $\dfrac{z+a}{a-z}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité différente de 1.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E_3) que l'on exprimera en utilisant la fonction tangente.

Problème 2

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. (a) Montrer que $\mathrm{I}_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Etablir que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) En déduire que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. (a) Justifier l'égalité :

   $$x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$$

   pour tout $x \in [0, 1]$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.
4. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\mathrm{I}_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

   (b) Montrer que :

   $$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+2}$$

   et en déduire un encadrement de I_n.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{I}_n$.