Exercice 1 *Wallis : première*

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n \mathrm{d}x$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n \mathrm{d}x$. (On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$.)
2. Calculer W_0 et W_1.
3. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

5. Grâce à cette dernière question, calculer W_2, W_3, W_4 et W_5.
6. Montrer grâce à l'avant-dernière question que pour tout entier $p \geq 0$, on a

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

7. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

(On pourra utiliser la question précédente en distinguant selon la parité de l'entier n.)

8. Prouver que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$$

et en déduire que

$$\frac{W_n}{W_{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

9. Montrer finalement que

$$W_n \times \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$.

Exercice 2 *Calcul d'une fonction*

On considère la fonction F définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x \mathrm{ch}(t)\sin(t)\,dt$$

1. Calculer $F(x)$ en utilisant deux intégrations par parties.
2. Independamment du calcul précédent, retrouver l'expression de F en développant à l'aide de exponentielles (réelles et complexes).

Exercice 3 *Une intégrale elliptique*

Soit $a < b$ deux nombres réels. Pour $a < \alpha < \beta < b$ et $0 < x < y < 1$, on définit

$$I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}, \quad J(x,y) = \int_x^y \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$$

1. Effectuer dans l'intégrale $I(\alpha,\beta)$ le changement de variable
$$u = \frac{b-t}{b-a}$$
2. Effectuer dans l'intégrale $J(x,y)$ le changement de variable
$$u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta \qquad \text{avec } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
3. Que se passe-t-il pour $I(\alpha,\beta)$ lorsque α tend vers a et β vers b ?