

DM 2, pour le 1/10/2020

Exercice 1 : Une étude de fonctions

On considère la fonction f définie par :

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - 2x + 3.$$

On note \mathcal{C} sa représentation graphique.

1. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$. Dresser le tableau des variations de f . On fera figurer les limites aux bornes. On déterminera aussi l'expression de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on en donnera une valeur approchée. On donne $\ln(2) \approx 0,7$.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
 (b) Montrer que \mathcal{T} est située au dessus de \mathcal{C} sur $]0; +\infty[$.
4. (a) Montrer que la relation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0; +\infty[$ avec $\alpha < \beta$.
 (b) Justifier que $\beta \in]1, 2[$.
5. Tracer l'allure de \mathcal{C} et de \mathcal{T} .

Exercice 2 : Une équation fonctionnelle Le but de cet exercice est de déterminer toutes les

fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = 1 - x - y. \quad (\text{E})$$

1. On suppose fixée une fonction f vérifiant (E).

(a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 1 - t - f(0).$$

(On pourra, pour t fixé, poser des valeurs bien choisies de x et y .)

(b) Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + b.$$

2. Conclure. Attention, on précisera bien la structure du raisonnement utilisée.