DM 1 — pour le 3/10/2019

Problème 0 *Une bijection réciproque.*

1. On souhaite étudier la fonction f définie pour tous les x pour lesquels cela a un sens par :
$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$$
On admettra le résultat suivant, vu en terminale : « Toute fonction f continue et strictement monotone sur un segment $[a,b]$ est une bijection de $[a,b]$ sur le segment dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$. »
   (a) Déterminer l'ensemble D_f de définition de f, puis expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0,\pi]$, en précisant quelles transformations géométriques permettraient ensuite de retrouver le reste de la courbe.
   (b) Montrer qu'on a : $\forall x \in]0,\pi[,\ 0 < f(x) \leq \sin(x) < x$.
   En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.
   (c) Étudier f sur l'intervalle $[0,\pi]$ et tracer son graphe sur $[0,\pi]$. On calculera $f(0)$, $f(\pi/3)$, $f(\pi)$, $f'(0)$, $f'(\pi/3)$, $f'(\pi)$, et on fera figurer sur le graphe les informations géométriques qu'on en a tiré.
   (d) Déterminez deux intervalles $I \subset [0,\pi]$ et J, maximaux, tels que la restriction de f à I soit une bijection sur J. On choisira I de telle sorte qu'on ait $0 \in I$.

   On convient de noter $h : J \to I$ la bijection réciproque de $f_I : I \to J$. L'objectif du problème est de donner une formule pour h à l'aide des seules fonctions usuelles. On ne cherchera donc pas encore à le faire dans cette question.

2. On souhaite étudier la fonction $\begin{array}{cccc} \varphi : & [-1,1] & \to & [-1,1] \\ & t & \mapsto & \dfrac{4-5t}{5-4t} \end{array}$
   (a) Justifier que ϕ est bien définie.
   (b) Étudier rapidement ϕ, sans tracer son graphe. Justifier que c'est une bijection.

3. On souhaite étudier la fonction g définie pour tous les x pour lesquels cela a un sens par par :
$$g(x) = \arccos\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)$$
   (a) Déterminer D_g puis expliquer pourquoi il suffit d'étudier g sur $[0,\pi]$, en précisant quelles transformations géométriques permettraient ensuite de retrouver le reste de la courbe.
   (b) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0,\pi[$ et calculer sa dérivée sur cet intervalle.
   (c) En déduire les variations de g sur $[0,\pi]$. On ne demande pas de tracer le graphe de g.

4. Dans cette question, on se donne un réel $x \in [0,\pi/3]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique réel $z \in [\pi/3,\pi]$ tel que $f(x) = f(z)$.
   (b) Calculer $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.
   (c) Calculer $(f \circ g)(x)$ et en déduire qu'on a $z = g(x)$.

5. Dans cette question, on se donne encore un réel $x \in [0,\pi/3]$ et on note z l'unique réel de $[\pi/3,\pi]$ tel que $f(x) = f(z)$. $z = g(x)$ d'après la question précédente.
   (a) Exprimer $\cos(x+z)$ et $\cos(x-z)$ comme des fractions rationnelles en $\cos x$ uniquement.
   (b) Montrer qu'on a $\cos\left(\dfrac{x+z}{2}\right) \geq 0$ et $\cos\left(\dfrac{x+z}{2}\right) \geq 0$.
   (c) En déduire qu'on a $\cos\left(\dfrac{x+z}{2}\right) = f(x)$ et $\cos\left(\dfrac{x-z}{2}\right) = 2f(x)$.

6. Finalement, donner une expression explicite de h.