

## Analyse

### Partie I : Etude de la fonction réciproque de la fonction $\tanh$ .

On notera respectivement  $\cosh$ ,  $\sinh$  et  $\tanh$  les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que  $\tanh$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à préciser. On note  $\operatorname{artanh}$  “ argument tangente hyperbolique ” sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de  $\tanh$  en fonction de  $\tanh$ .
3. Démontrer que  $\operatorname{artanh}$  est impaire.
4. Démontrer que  $\operatorname{artanh}$  est dérivable sur  $I$  et calculer sa dérivée.
5. Exprimer  $\operatorname{artanh}$  à l'aide de fonctions usuelles.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de  $\operatorname{artanh}$  en 0.

### Partie II : Etude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle  $(E) : x y' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$ .

7 Résoudre  $(E)$  sur l'intervalle  $J = ]0, 1[$ .

### Partie III : Etude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

déterminer les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

- 8 Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
- 9 Déterminer les valeurs possibles de  $f(0)$  si  $f$  est solution.
- 10 Montrer que, si  $f$  est solution, on a  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$ . (on pourra exprimer  $f(x)$  en fonction de  $f\left(\frac{x}{2}\right)$ .)
- 11 Montrer que si  $f$  est solution,  $-f$  est aussi solution.
- 13 Montrer que  $\tanh$  est solution du problème posé.

Dans les questions **13.** à **17.**, on suppose que  $f$  est une solution du problème posé, que  $f(0) = 1$  et que  $f$  n'est pas constante.

On considère  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tel que  $f(x_0) \neq f(0)$  et l'on définit la suite  $(u_n)$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$ .

- 14 Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite.
- 15 Etablir une relation entre  $u_n$  et  $u_{n+1}$  ; en déduire que la suite  $(u_n)$  garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de  $u_0$ .

16 En utilisant les résultats des questions **13.** et **14.**, aboutir à une contradiction.

17 Que peut-on dire si l'hypothèse “ $f(0) = 1$ ” est remplacée par l'hypothèse “ $f(0) = -1$ ” ?

18 Conclusion ?

Dans les questions **18.** à **22.**, on suppose que  $f$  est une solution du problème posé et que  $f(0) = 0$ .

19 En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions **13.** à **17.**, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq -1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq 1.$$

On définit alors la fonction  $g$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{artanh}(f(x))$ .

20 Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x)$ .

21 Montrer que  $g$  est dérivable en zéro.

22 Soit  $x \in \mathbb{R}^\times$ ; on définit la suite  $(v_n)$  par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$ .

Montrer que  $(v_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

23 En déduire que  $g$  est linéaire.

24 Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

## Algèbre

**Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.**

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

### Partie I

On pose :  $A = (X + 1)^{2n} - 1$ , polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ .

1. Montrer que l'on peut écrire  $A = X \times B$  où  $B$  est un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté  $b_0$ .

2. Déterminer les racines de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ . On posera  $z_0 = 0$  et les autres racines  $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$  seront mises sous forme trigonométrique.

$$\text{On pose } P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}.$$

3. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que  $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ .

$$\text{En déduire que, si } Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}, \text{ alors } P_n = \sqrt{Q_n}.$$

4. Calculer de deux façons :  $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ . Puis, en déduire  $Q_n$  et enfin,  $P_n$ .

5. On pose  $F = \frac{1}{A}$ . Déterminer la décomposition de  $F$  en éléments simples sur  $\mathbb{C}$ .

## Partie II :

On travaille dans un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  supposé non réduit au vecteur nul.  $\mathcal{L}(E)$  désigne l'ensemble des endomorphismes de  $E$ ,  $I_E$  est l'application identité de  $E$  et  $\theta$  désigne l'application nulle. Par convention :  $\forall f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $f^0 = I_E$ .

On étudie sur quelques cas particuliers, l'équation :  $(f + I_E)^{2n} - I_E = \theta$  où  $f \in \mathcal{L}(E)$  est l'inconnue.

6 Déterminer les homothéties vectorielles qui sont solutions de l'équation proposée.

7 En développant  $(1 + 1)^{2n}$  et  $(1 - 1)^{2n}$  déterminer les sommes  $S = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$  et  $S' = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$

(la notation  $\binom{n}{k}$  désigne le coefficient binomial :  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .)

8 Si  $s$  est une symétrie de  $E$ , exprimer  $(s + I_E)^{2n} - I_E$  en fonction de  $s$  et  $I_E$ .  
En déduire les symétries de  $E$  solutions de l'équation proposée.

## Partie III :

On travaille dans  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .  
 $I$  désigne la matrice identité et  $O$  la matrice nulle.

On pose  $G = \{M_{a,b} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$  où  $M_{a,b}$  désigne la matrice  $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ .

9 Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$  dont on précisera la dimension et une base ; vérifier que  $G$  est stable pour le produit matriciel.

On cherche à résoudre l'équation matricielle (\*)  $(M + I)^{2n} - I = O$ , avec  $M$ , matrice inconnue, dans  $G$ .

On note  $E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^3$  et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $E$ .

Soient  $M = M_{a,b}$  un élément de  $G$  tel que  $b \neq 0$ ,  $u$  l'endomorphisme de  $E$  canoniquement associé à  $M$  et  $I_E$ , l'application identité de  $E$ .

10 Déterminer une base  $(e'_1)$  de  $E_1 = \ker(u - (a + 2b).I_E)$ .

11 Déterminer une base  $(e'_2, e'_3)$  de  $E_2 = \ker(u - (a - b).I_E)$ .

12 Montrer que  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $E$  ; on la note  $\mathcal{B}'$ .

13 Déterminer la matrice  $D$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

14 On note  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

Ecrire  $P$  et déterminer  $P^{-1}$  en précisant la méthode utilisée et en détaillant les calculs.

15 Exprimer  $M$  en fonction de  $P$ ,  $D$  et  $P^{-1}$ .

16 Montrer que :  $M$  est solution de l'équation (\*) si et seulement si  $D$  est solution de l'équation (\*).

17 Déterminer toutes les matrices  $D$  solutions de l'équation (\*).

18 En déduire toutes les solutions de l'équation (\*) dans  $G$ .