

## DM 1, pour le 10/09/2020

### Consignes de présentation :

Ces consignes sont valables pour les DM et les DS. Les enfreindre entraînera une non-correction de tout ou partie de la copie (comme cela serait d'ailleurs le cas aux concours) :

- Utilisez des copies doubles.
- Écrivez votre nom sur chaque copie (en revanche, la classe n'est pas utile...).
- Numérotez les copies.
- Numérotez les questions. Vous pouvez traiter les questions dans un ordre différent de celui de l'énoncé, notamment en DS, mais dans ce cas il faut l'écrire explicitement.
- Barrez proprement si nécessaire (pas de correcteur liquide, pas de rature).
- Soulignez ou encadrez les résultats.
- Formez une marge (si vous utilisez des copies à petits carreaux) et n'écrivez pas dedans (dans tous les cas). Aérez votre copie : sautez des lignes entre les questions. Laissez un espace (entre un quart et une demi-page) en haut de votre première copie pour que le professeur puisse y inscrire des remarques.

### Consignes pour le travail :

Le but des DM est double. Tout d'abord, les DM permettent de progresser en rédaction mathématique, en étant corrigé par son professeur. Ils fournissent donc un excellent entraînement aux DS (le calendrier est d'ailleurs prévu pour que, sauf événement imprévu, je rende systématiquement les DM avant le DS suivant). Par ailleurs, les DM sont l'occasion d'aborder des problèmes parfois plus originaux ou plus difficiles que ce que vous aurez l'occasion de voir en DS. En conséquence :

- Les DM commencent toujours par des exercices ou des questions élémentaires, que vous devez absolument chercher et rédiger seuls.
- En revanche, il n'est pas rare de croiser des questions plus difficiles ou demandant de l'initiative. Il est bien sûr positif de chercher ces questions en groupe, pendant la pause du déjeuner, ou après les cours. Il est autorisé, voire recommandé, de me poser des questions si vous avez des doutes sur votre démarche : directement après les cours, pendant le TD, par mail, sur le serveur de la classe...
- L'attitude la pire qu'on puisse avoir face à un DM consiste à s'y mettre la veille au soir (voire le matin...), en faisant semblant de travailler et en recopiant vaguement ce qu'un camarade plus consciencieux aurait fait avant. Cela ne trompe personne, et surtout, cela ne vous fait absolument pas progresser ; pire, cela vous fait culpabiliser pour absolument rien. Il faut s'y mettre en avance, et ce n'est pas grave si vous ne les finissez pas !

Ce DM est constitué de deux exercices : l'un comprend de courtes questions indépendantes entre elles, l'autre est un exercice de recherche un peu plus ardu.

**Exercice 1 :** Des questions indépendantes

1. Soit  $x, y$  des réels. Décomposer en produit de trois ou quatre facteurs les quantités

$$x^4 - 1, \quad 16x^4 - 81y^4, \quad (xy - 1)^2 - (x - y)^2$$

2. En calculant pour  $x = 2$  et  $x = 3$  la valeur du polynôme

$$A = 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18,$$

déduire que ce polynôme peut se mettre sous la forme

$$A = (ax + b)(x - 2)(x - 3)$$

$a$  et  $b$  étant des coefficients que l'on calculera.

3. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{2x - 3}{9} - \frac{x}{6} = \frac{31 - 2x}{2}$$

4. Soit  $m \in \mathbb{R}$ . Résoudre et discuter (selon la valeur de  $m$ ) l'équation suivante, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$m^2(x + 1) = x + m$$

**Problème 2 :** Le nombre de racines réelles d'une équation du troisième degré.

Soit  $p, q$  deux réels et, pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = x^3 + px + q$$

On se propose de déterminer le nombre de réels  $x$  tels que  $f(x) = 0$ .

1. On suppose  $p \geq 0$ . Tracer le tableau de variations de  $f$  et conclure dans ce cas.
2. On suppose  $p < 0$ .

Tracer le tableau de variations de  $f$ .

Soit  $x_1$  et  $x_2$  les points d'annulation de  $f'$ . Calculer  $f(x_1) \times f(x_2)$  en fonction de  $p$  et de  $q$ .

3. Déterminer, en fonction de la quantité

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2,$$

le nombre de racines réelles de l'équation  $f(x) = 0$ .