

Vous justifierez toutes vos réponses par des calculs et des phrases écrites dans un français correct. (Le but d'un DM est non seulement d'apprendre à résoudre des exercices mais aussi de tester, puis d'améliorer, sa rédaction.)

**Exercice 1** Une inéquation

Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$x + \frac{1}{x} \leq |x+4| + 3$$

(On prêtera une attention particulière à la rédaction.)

---

**Exercice 2** Une équation fonctionnelle

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifient :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1+x \quad (E_1)$$

1. **Analyse** Soit  $f$  une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie  $(E_1)$ .
    - (a) Déterminer  $f(\frac{1}{2})$ .
    - (b) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$ . On note cette égalité  $(E_2)$ .
    - (c) A l'aide de  $(E_1)$  et  $(E_2)$ , déterminer une expression de  $f(x)$  valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
  2. **Synthèse.** Conclure l'exercice.
- 

**Exercice 3** Étude d'un type de suites

Soit  $a, b$  deux réels et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels tels que :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Le but de l'exercice est de calculer  $u_n$  en fonction de  $n$  et de  $u_0$ .

1. Traiter le cas  $a = 1$ .

On suppose désormais  $a \neq 1$ .
2. Montrer que l'équation  $x = ax + b$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ , possède une seule solution  $l$ .
3. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = u_n - l$$

Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique. Conclure.

4. À quelles conditions sur les réels  $a, b$  la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ?
-