Quelques compléments au programme de spécialité de terminale

Simon Billouet

11 février 2020

Points abordés

Déroulement

Proposition de plan :

1. Analyse
2. Combinatoire
3. Probabilités

Points abordés

Déroulement

Proposition de plan :

1. Analyse
2. Combinatoire
3. Probabilités

Fonctionnement

Sur chaque point, rapide présentation, algorithmes, exercices, discussion.

Méthode de Héron (ou babylonienne)

Le principe

Pour calculer la racine carrée de $a > 0$, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme $x_0 > 0$ (pas trop éloigné de $\sqrt{a}$) et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Méthode de Héron (ou babylonienne)

Le principe

Pour calculer la racine carrée de $a > 0$, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme $x_0 > 0$ (pas trop éloigné de $\sqrt{a}$) et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Idée géométrique...

Méthode de Héron (ou babylonienne)

Le principe

Pour calculer la racine carrée de $a > 0$, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme $x_0 > 0$ (pas trop éloigné de $\sqrt{a}$) et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Idée géométrique...

Convergence rapide

Des tests numériques suggèrent une convergence très rapide vers $\sqrt{a}$ (le nombre de décimales exactes double à chaque itération).

Preuves

Identités

On montre que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_{n+1}^2 - a = \left(\frac{x_n^2 - a}{2x_n}\right)^2 \text{ et } x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n}$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Preuves

Identités

On montre que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_{n+1}^2 - a = \left(\frac{x_n^2 - a}{2x_n}\right)^2 \text{ et } x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n}$$

donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Vitesse de convergence

On a également, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{|x_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$$

d'où on déduit une convergence quadratique.

Méthodes numériques pour résoudre $f(x) = 0$

Principe général

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a, b]$ sur lequel f est suffisamment régulière (au moins de classe $\mathcal{C}^1$, souvent de classe $\mathcal{C}^\infty$), change de signe et est strictement monotone, de sorte que le théorème de la bijection assure l'existence et l'unicité d'un zéro α de f sur $[a, b]$.

Méthode de dichotomie

Principe

On coupe l'intervalle en deux parties égales, et on en garde un sur lequel f change de signe. On itère ce procédé jusqu'à avoir un intervalle de longueur inférieure à une précision $\varepsilon > 0$ fixée à l'avance ; on est assuré d'avoir alors une valeur approchée de α à ε près.

Méthode de dichotomie

Principe

On coupe l'intervalle en deux parties égales, et on en garde un sur lequel f change de signe. On itère ce procédé jusqu'à avoir un intervalle de longueur inférieure à une précision $\varepsilon > 0$ fixée à l'avance ; on est assuré d'avoir alors une valeur approchée de α à ε près.

Intérêts et limites

- Nombre d'itérations de l'algorithme : $\lfloor \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \rfloor + 1$.
- Cette méthode donne une preuve théorique du théorème des valeurs intermédiaires (en admettant le théorème des suites adjacentes).
- Méthode n'utilisant aucune propriété fine de f : seulement un nombre fini de valeurs !
- Méthode relativement lente en pratique (linéaire).

Méthode de la fausse position (*regula falsi*)

Principe

Le même que celui de la méthode de la dichotomie, mais on prend pour deux intervalles $[a, \beta]$ et $[\beta, b]$ où β est le point où la droite joignant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ coupe l'axe des abscisses.

Méthode de la fausse position (*regula falsi*)

Principe

Le même que celui de la méthode de la dichotomie, mais on prend pour deux intervalles $[a, \beta]$ et $[\beta, b]$ où β est le point où la droite joignant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ coupe l'axe des abscisses.

Analyse

Un peu plus compliquée... Et non mentionnée dans le programme. Convergence linéaire là encore.

Méthode de la sécante

Principe

Comme dans la méthode de la fausse position, on part de deux points $x_0 = a$ et $x_1 = b$ qui encadrent la racine, et l'on calcule l'abscisse x_2 du point où la sécante coupe l'axe des abscisses. Mais au lieu de choisir un segment, on remplace (x_0, x_1) par (x_1, x_2)... et on itère.

Méthode de la sécante

Principe

Comme dans la méthode de la fausse position, on part de deux points $x_0 = a$ et $x_1 = b$ qui encadrent la racine, et l'on calcule l'abscisse x_2 du point où la sécante coupe l'axe des abscisses. Mais au lieu de choisir un segment, on remplace (x_0, x_1) par (x_1, x_2)... et on itère.

Analyse

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, strictement convexe, alors la méthode de la sécante est au moins d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Méthode de Newton

Principe

Le même que celui de la sécante... Mais en remplaçant la sécante par la tangente !

Méthode de Newton

Principe

Le même que celui de la sécante... Mais en remplaçant la sécante par la tangente !

Analyse

Il y a des cas où la méthode ne converge pas (dessin).
Sous des hypothèses sympathiques, la méthode converge et est d'ordre 2.

Premières propriétés

Définition

La *série harmonique* est la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

C'est un exemple (contre-intuitif ?) de série divergente (pourquoi ?) dont le terme général tend vers 0.

Premières propriétés

Définition

La *série harmonique* est la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

C'est un exemple (contre-intuitif ?) de série divergente (pourquoi ?) dont le terme général tend vers 0.

Applications

L'espérance dans le problème du collectionneur de vignettes est de nH_n. Autres applications dans les domaines de la musique, l'architecture, ou les contre-exemples bizarres (la série H'_n où l'on supprime les termes qui correspondent à un n qui possèdent un 9 dans leur écriture en base 10 converge...).

Encadrement plus précis

Principe

Comparaison série intégrale : si f est décroissante sur $[1, +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ sont de même nature.

Encadrement plus précis

Principe

Comparaison série intégrale : si f est décroissante sur $[1, +\infty[$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ sont de même nature.

Mais on peut faire mieux...

Et prouver que $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1$ pour tout $n \geq 1$.
Cela donne un équivalent de H_n... et on peut continuer :

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

où $\gamma \in]0, 1[$, appelée constante d'Euler. On sait très peu de choses sur la constante γ (notamment, on ne sait pas s'il s'agit d'un nombre rationnel).

Algorithme de Brouckner

Principe

La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln(2)$ (pourquoi ?). On peut donc l'utiliser assez facilement pour calculer une valeur approchée du logarithme.

Algorithme de Brouckner

Principe

La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln(2)$ (pourquoi ?). On peut donc l'utiliser assez facilement pour calculer une valeur approchée du logarithme.

Problème... et solution

La convergence est lente. Toutefois, si l'on regroupe les termes par deux, on a $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$, et la série converge plus rapidement. Attention toutefois, le regroupement de termes dans les séries non absolument convergentes est périlleux (mais là, on a le droit)... Le résultat ne reste pas incroyable !

Algorithme de Briggs

Principe

On veut calculer le logarithme d'un nombre $x > 0$. On définit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = x$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Cette suite converge vers 1. Quand $|u_n - 1| \leq \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ fixé à l'avance, on approxime $\ln(u_n) \simeq u_n - 1$. Il ne reste plus qu'à écrire

$$\ln(x) = 2\ln(u_1) = 4\ln(u_2) = \cdots = 2^{n+1}\ln(u_n) \simeq 2^{n+1}(u_n - 1)$$

Algorithme de Briggs

Principe

On veut calculer le logarithme d'un nombre $x > 0$. On définit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = x$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Cette suite converge vers 1. Quand $|u_n - 1| \leq \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ fixé à l'avance, on approxime $\ln(u_n) \simeq u_n - 1$. Il ne reste plus qu'à écrire

$$\ln(x) = 2\ln(u_1) = 4\ln(u_2) = \cdots = 2^{n+1}\ln(u_n) \simeq 2^{n+1}(u_n - 1)$$

Problèmes

Nombreux ! Numériques, théoriques...

Rôle dans le programme

Interactions

- Probabilités
- Vocabulaire ensembliste
- Informatique
- Raisonnement par récurrence...

Rôle dans le programme

Interactions

- Probabilités
- Vocabulaire ensembliste
- Informatique
- Raisonnement par récurrence...

Démonstrations ?

La plupart des démonstrations sont théoriques et fondatrices de la notion d'ensemble fini. On doit donc les admettre (et c'est heureux !).

Premiers principes

Principe des bergers

Cardinal d'une union disjointe.
Exemples : nombre de couples $(x, y) \in [|1, n|]^2$ tels que $x \neq y$, nombre de mots à n lettres sur un alphabet de p lettres sans deux lettres consécutives identiques.

Premiers principes

Principe des bergers

Cardinal d'une union disjointe.
Exemples : nombre de couples $(x, y) \in [|1, n|]^2$ tels que $x \neq y$, nombre de mots à n lettres sur un alphabet de p lettres sans deux lettres consécutives identiques.

Cardinal d'un produit cartésien

Notion de k-uplet ou k-liste. Modélisation : tirages successifs (tirage de 5 cartes successifs dans un jeu de 52, mots de 8 lettres contenant le mot « PLOUF »).
Permutations, factorielle.

Nombre de parties, k-combinaisons

Parties

Il y a 2^n parties d'un ensemble à n éléments (mots de longueur n sur un alphabet à 2 éléments).

Nombre de parties, k-combinaisons

Parties

Il y a 2^n parties d'un ensemble à n éléments (mots de longueur n sur un alphabet à 2 éléments).

Combinaisons

Définition combinatoire de $\binom{n}{k}$ (nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments). Formule et explication. Explicitation pour $k \in \{0, 1, 2\}$, symétrie. Relation et triangle de Pascal.
Démonstrations au programme : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, relation de Pascal.

Loi de Poisson vue comme limite de lois binomiales

Convergence en loi

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires suivant des lois binomiales de paramètres n, p_n et que $np_n \to \lambda > 0$, alors on a, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) \to \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Loi de Poisson vue comme limite de lois binomiales

Convergence en loi

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires suivant des lois binomiales de paramètres n, p_n et que $np_n \to \lambda > 0$, alors on a, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) \to \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

En pratique, si X suit une loi binomiale de paramètres n, p avec $n \geq 30, p < 0,1$ et $np \leq 15$, la loi de Poisson de paramètre np est une bonne approximation de la loi de X.

Loi de Poisson vue comme limite de lois binomiales

Convergence en loi

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires suivant des lois binomiales de paramètres n, p_n et que $np_n \to \lambda > 0$, alors on a, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) \to \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

En pratique, si X suit une loi binomiale de paramètres n, p avec $n \geq 30, p < 0,1$ et $np \leq 15$, la loi de Poisson de paramètre np est une bonne approximation de la loi de X.

Interprétation

Événements rares : accidents, défaut de crédit...

Linéarité de l'espérance

Démonstration

Une démonstration nécessite de formaliser les variables aléatoires comme fonctions sur l'univers... Mais le résultat est intuitif (quel résultat obtient-on en moyenne quand on somme le résultat de deux dés non pipés ?).

Linéarité de l'espérance

Démonstration

Une démonstration nécessite de formaliser les variables aléatoires comme fonctions sur l'univers... Mais le résultat est intuitif (quel résultat obtient-on en moyenne quand on somme le résultat de deux dés non pipés ?).

Exemples

Espérance d'une loi binomiale.

Problème du collectionneur !

Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Bienaymé-Tchebychev

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Inégalité de concentration, loi des grands nombres

Inégalité de concentration

On considère $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes, de même loi, d'espérance μ, de variance V, et M_n leur moyenne. Alors

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$$

Inégalité de concentration, loi des grands nombres

Inégalité de concentration

On considère $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes, de même loi, d'espérance μ, de variance V, et M_n leur moyenne. Alors

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$$

Loi (faible) des grands nombres

Pour tout $\delta > 0$, lorsque $n \to +\infty$:

$$\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \delta) \to 0$$

Réconciliation des points de vue fréquentiste et bayésien.

Merci pour votre attention !